MANUALI HOEPLI

DETERMINANTI

TEORIA ED APPLICAZIONI

CON TUTTE LE PIÙ RECENTI RICERCHE

PER

ERNESTO PASCAL

PROF. ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1897.

INDICE

PARTE PRIMA.

Fondamenti del calcolo dei determinanti.

PARTE SECONDA.

Ricerche speciali sui determinanti e applicazioni.

PREFAZIONE

Sui determinanti sono state fatte, massime negli ultimi tempi, moltissime ricerche speciali, le quali per varie ragioni non hanno ancora potuto trovar posto nei Trattati.

Io mi son proposto di raccogliere in breve tutto quello che ho potuto trovare di simil genere, e di comporre un libro in cui tutte siffatte ricerche trovassero il loro posto più o meno largamente.

È da questo punto di vista che io ho fiducia che il mio libro potrà riuscire di qualche aiuto a chi voglia formarsi un concetto di tutti i progressi che ha fatto finora questo ramo dell' analisi. Basta infatti scorrere l'indice del volume per accorgersi che vi è compresa una folla di argomenti che ora per la prima volta entrano a far parte di un trattato sui determinanti. Il che appare tanto più interessante quando si pensi che la causa per la quale, molte volte, qualche Autore pubblica, come nuove, cose già conosciute, la si deve ricercare precipuamente nel fatto che tali

cose non sono ancora entrate a far parte di trattati, i quali rappresentano senza dubbio il mezzo migliore per diffondere le teorie. Esempi di ciò non ne mancano nella stessa teoria dei determinanti; basta per es. ricordare i vari lavori che si sono succeduti sull' argomento dei determinanti formati coi minori di un altro determinante dato.

Questo libro è diviso in due parti: nella prima parte si contiene tutto ciò che dovrebbe studiare un principiante; nella seconda parte, assai più estesa, si contengono, con tutte le più dettagliate annotazioni bibliografiche, le ricerche speciali di cui ho sopra parlato.

Non mi sono diffuso sulle applicazioni geometriche, perchè la teoria dei determinanti si applica, quasi ad ogni passo, in tutta la geometria analitica, e penso, come disse già il GÜNTHER nella prefazione del suo pregevole trattato, che un libro sui determinanti non deve diventare un libro di geometria analitica.

Pavia, primavera del 1896.

ERNESTO PASCAL.

PARTE PRIMA.

Fondamenti del calcolo dei determinanti.

§ 1. — Definizioni fondamentali.

Sia n un numero intero positivo, e si abbiano n^2 quantità. Si dispongono queste quantità in un quadrato, collocando in una prima linea n di esse, in una seconda linea, e in colonna colle precedenti, altre n di esse, e così di seguito sino a formare la n^{ma} linea.

Per potere con maggiore facilità e simmetria, andare avanti nelle nostre considerazioni, ci si presenta qui utile di rappresentare in una certa maniera queste n^2 quantità date, e propriamente indicheremo con a_{rs} quella fra esse, la quale nella collocazione in quadrato, verrà ad occupare il posto s^{mo} della r^{ma} linea.

Il quadrato allora presenterà questa forma:

$$\begin{matrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn}. \end{matrix}$$

Le quantità a le chiamiamo *elementi* del quadrato.

Consideriamo ora n di questi elementi scelti in maniera che due di essi non appartengano mai nè alla medesima linea, nè alla medesima colonna, e facciamo il prodotto di tali n elementi. Esaminiamo in quanti modi diversi possiamo formare un tale prodotto. Prima di tutto è chiaro che dovendo scegliere n elementi, e non potendo due di essi appartenere alla medesima linea, tutte le n linee saranno rappresentate, cioè a dire, non vi sarà nessuna delle n linee alla quale non apparterrà uno e uno solo degli elementi scelti; e lo stesso dicasi per le n colonne.

Possiamo allora ordinare questi n elementi in maniera che il primo di essi sia un elemento appartenente alla prima linea, il secondo uno appartenente alla seconda linea, e così di seguito, l'n^{mo} uno elemento appartenente alla n^{ma} linea. Il prodotto degli n elementi scelti sarà allora

$$a_{1r_1}\, a_{2r_2}\, \ldots\, a_{nr_n}$$

dove $r_1 r_2 \ldots r_n$ rappresentano una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots n$. La domanda: *quanti prodotti di questa specie, fra loro diversi, si possono formare?* corrisponde esattamente all'altra domanda: *quante possibili permutazioni* $r_1 r_2 \ldots r_n$ *dei numeri* $1, 2, \ldots n$ *possono formarsi?* Si sa che questo numero è $n!$ onde possiamo conchiudere che si possono formare $n!$ prodotti del tipo precedente.

Si consideri ora ciascuno di tali prodotti, col segno $+$ o col segno $-$ secondochè la permuta-

zione degli indici $r_1 r_2 \ldots r_n$ è una permutazione pari o una permutazione dispari; come si sa dalla teoria delle permutazioni, vi saranno allora $\frac{n!}{2}$ prodotti col segno $+$, e altrettanti col segno $-$. *La somma algebrica di tutti i siffatti prodotti coi rispettivi segni, si chiama* DETERMINANTE *delle n^2 quantità date.*

Secondo una notazione introdotta da *Cayley* il determinante si suole rappresentare col simbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ovvero anche

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

Il numero n si chiama *ordine* del determinante.

Si può osservare che tutti i termini del determinante si ottengono da

$$a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$$

lasciando fissi i primi indici, e facendo variare in tutti i modi possibili i secondi indici, e assegnando poi a ciascun termine il segno conveniente secondo la regola stabilita.

L'assieme degli n^2 elementi disposti in quadrato forma ciò che si suol chiamare la *matrice quadrata.*

Gli elementi nei quali i due indici sono eguali $a_{11}, a_{22}, \ldots$ si sogliono chiamare *gli elementi principali*, e la retta diagonale del quadrato, che nella indicata notazione, contiene quegli elementi, si suol chiamare *la diagonale principale.* L'altra diagonale del quadrato si suol chiamare la *seconda diagonale.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

§ 2. — Osservazioni varie e proprietà elementari dei determinanti.

Passiamo ad esporre alcune proprietà le quali si ricavano immediatamente dalla definizione.

1. Supponiamo un determinante nel quale tutti gli elementi sieno zero, meno quelli della diagonale principale:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Il valore di questo determinante è eguale al

prodotto degli elementi della diagonale principale col segno positivo.

Analogamente se in un determinante sono zero tutti gli elementi, meno quelli della seconda diagonale, il determinante è eguale al prodotto di tutti gli elementi contenuti nella seconda diagonale moltiplicato per $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Perchè allora il determinante si riduce evidentemente all'unico termine

$$a_{1n}\ a_{2,n-1}\ .\ .\ .\ a_{n,1}$$

e il segno di questo si calcola secondo il numero delle inversioni contenute nella permutazione

$$n,\ n-1,\ n-2,\ .\ .\ .\ 1,$$

le quali sono esattamente $\frac{n\,.\,n-1}{2}$.

Così è anche chiaro che *se in un determinante tutti gli elementi di una linea sono zero, il determinante è zero*. Giacchè dovendo ogni termine contenere sempre per fattore un elemento di quella linea, qualunque termine sarà zero.

Questi stessi risultati si hanno se in un determinante sono zero tutti gli elementi situati solo da una stessa parte della diagonale principale o della seconda diagonale.

2. Abbiamo distribuito i diversi fattori di un termine del determinante in maniera che i *primi* indici di essi formino nell' ordine naturale i numeri 1, 2, . . . n.

Il segno che compete al termine è poi il segno +

o il segno — secondochè è pari o dispari il numero delle *inversioni* contenute nella permutazione formata dai secondi indici $r_1\, r_2 \ldots r_n$.

Ora supponiamo di invertire in un modo qualunque l'ordine dei fattori di un termine; si abbia così dal termine

$$a_{1r_1}\, a_{2r_2} \ . \ . \ . \ a_{nr_n}$$

il termine

$$a_{s_1t_1}\, a_{s_2t_2} \ . \ . \ . \ a_{s_nt_n}$$

dove

$$s_1\ s_2 \ . \ . \ . \ s_n\,, \quad t_1\ t_2 \ . \ . \ . \ t_n$$

rappresentino due permutazioni dei numeri

$$1,\ 2,\ . \ . \ . \ n.$$

Esaminiamo con che regola si troverebbe il *segno* di questo termine messo sotto l'ultima forma.

Per passare dalla prima forma alla seconda forma, io opero una certa permutazione sugli elementi a, il che corrisponde ad operare una permutazione sui *primi* indici, e una simile permutazione sui *secondi* indici.

Ogni permutazione si può ridurre ad un certo numero di *trasposizioni*, e ogni *trasposizione* fa cangiare di un numero *dispari* il numero delle *inversioni*. Se dunque la permutazione che vengo a fare sugli elementi, corrisponde ad m trasposizioni, ne viene che il numero s delle inversioni contenute nella permutazione $s_1\, s_2 \ldots s_n$ diminuito del numero delle inversioni contenute nella per-

mutazione 1, 2,... n (il qual numero è zero) è m volte un numero dispari; e così la differenza fra il numero t delle inversioni di $t_1\,t_2\ldots t_n$ e quello r delle inversioni di $r_1\,r_2\ldots r_n$ è anche m volte un numero dispari, cioè

$$s = m\,(2\,A + 1)$$
$$t - r = m\,(2\,B + 1)$$

donde

$$s + t = r + (\text{num. pari}),$$

cioè le inversioni contenute in $r_1\,r_2\ldots r_n$ sono pari o dispari secondochè è pari o dispari la somma di quelle contenute in $s_1\,s_2\ldots s_n$, e in $t_1\,t_2\ldots t_n$.

Onde ne ricaviamo che per calcolare il segno del termine messo sotto la forma.

$$a_{s_1t_1}\;a_{s_2t_2}\;\ldots\;a_{s_nt_n}$$

basta considerare se è pari o dispari la somma delle inversioni contenute nella permutazione dei primi indici e in quella dei secondi.

In questa maniera la definizione di un determinante è resa indipendente dall'ordine con cui immaginiamo distribuiti i fattori in ciascun termine, e resta tolta quella limitazione che per maggiore semplicità e chiarezza ci eravamo imposti nel paragrafo precedente.

3. Se in un determinante si scambiano le linee colle colonne, cioè a dire, se dispongo nella prima colonna gli elementi costituenti la prima linea, e nella seconda colonna gli elementi della seconda linea, e così di seguito, si ottiene un nuovo determinante eguale al primitivo.

Giacchè sia

$$a_{1r_1}\ a_{2r_2}\ .\ .\ .\ a_{nr_n}$$

un termine del primitivo determinante. Evidentemente, a meno del segno, esso è anche un termine del nuovo determinante. Solo che considerando gli a come elementi del nuovo determinante, i primi indici non rappresentano più il numero d'ordine della linea cui quell'elemento appartiene, ma della *colonna*, e così il secondo indice sarà invece il numero d' ordine della linea. Il termine precedente considerato come appartenente allo sviluppo del nuovo determinante, dovrà avere il segno + o — secondochè è pari o dispari la somma delle inversioni contenute nelle due permutazioni dei primi indici e dei secondi; ora evidentemente tal numero è lo stesso di quello delle inversioni contenute solo nella permutazione $r_1\,r_2\ldots r_n$; e quindi il segno che bisogna assegnare a quel termine come appartenente al secondo determinante è lo stesso del segno che ad esso bisogna assegnare come termine del primitivo determinante.

Lo stesso potendosi ripetere per tutti i singoli termini, appare evidente la verità dell'assunto.

4. Se in un determinante si scambiano fra loro due linee parallele, si ha un nuovo determinante eguale e di segno contrario al primitivo.

Evidentemente, a meno del segno, un termine del primitivo determinante è anche un termine del nuovo, e reciprocamente.

Inoltre se

$$a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\ .\ .\ .$$

è un termine del determinante, e gli indici dei posti che occupano a, b, c, ecc. nel determinante antico sono rispettivamente

$$\begin{array}{cc} s_1 & r_1 \\ s_2 & r_2 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ s_n & r_n \end{array}$$

gli indici dei posti che occupano gli stessi termini nel determinante nuovo, sono gli stessi nel complesso, salvo che c' è lo scambio fra loro di due s, o di due r, secondochè abbiamo fra loro permutate due linee o due colonne. Quindi la somma del numero delle inversioni esistenti nelle due permutazioni, delle s e delle r, resta aumentato o diminuito di un numero dispari, e quindi nel nuovo determinante allo stesso termine deve assegnarsi segno opposto a quello di prima.

5. Dal teorema precedente si ricava facilmente quest'altro: *se in un determinante due linee parallele sono identiche, il determinante è zero.*

Infatti scambiando queste due linee fra loro il determinante D dovrebbe cambiare di segno e diventare $-D$. Ma d'altra parte il determinante resta lo stesso di prima, perchè le due linee sono eguali, dunque $D = -D$ e quindi $D = 0$.

6. *Se gli elementi di una linea si moltiplicano per uno stesso numero k, tutto il determinante resta moltiplicato per k.*

Infatti ogni termine dello sviluppo, contenendo sempre uno, e solo uno, degli elementi di quella linea, resterà moltiplicato per k.

7. *Un determinante non si altera se si cambia*

segno a tutti gli elementi che occupano posti DISPARI, *intendendo posti dispari quelli nei quali la somma degli indici è dispari.*

Infatti ciò equivale a moltiplicare per -1 la 2.ª, 4.ª ecc. linea, e inoltre anche la 2.ª, 4.ª ecc. colonna. Così

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Analogamente, e più generalmente, *un determinante non si altera se ogni a_{ik} si moltiplica per p^{i-k} dove con p si intende un numero qualunque.*

8. *Un determinante è nullo se gli elementi di una linea sono equimultipli di quelli di una linea parallela.*

Infatti se gli elementi di una linea sono eguali a quelli di un'altra moltiplicati per k, moltiplicando gli elementi di quest'ultima linea per k si ha un determinante con due linee parallele identiche e quindi zero; intanto il determinante che si ottiene è eguale al determinante primitivo moltiplicato per k.

9. Supponiamo che gli elementi di una linea sieno delle espressioni polinomie del medesimo numero di termini. Si abbia cioè un determinante della forma.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} + \ldots, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} + \ldots, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + b_{n1} + c_{n1} + \ldots, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In ogni termine dello sviluppo vi sarà sempre come fattore un elemento della prima colonna; cioè un termine dello sviluppo sarà della forma generale

$$(a_{i1} + b_{i1} + c_{i1} + \ldots) A$$

dove A rappresenta un prodotto di $n-1$ elementi scelti fra le altre colonne, e le altre linee (esclusa la i^{ma} linea, e la prima colonna).

Ora questo termine è

$$a_{i1} A + b_{i1} A + c_{i1} A + \ldots$$

e il determinante sarà

$$\Sigma \pm a_{i1} A + \Sigma \pm b_{i1} A + \ldots$$

dove il segno di ciascun termine si determina colla solita regola. La prima parte di questa espressione non è altro che il determinante dato quando in luogo degli elementi della prima colonna si lasciano solo le

$$a_{11} \quad a_{21} \; \ldots \; a_{n1};$$

la seconda parte analogamente non è altro che il determinante dato quando in luogo degli elementi della prima colonna si pongono le

$$b_{11} \; b_{21} \; \ldots \; b_{n1};$$

e così di seguito. Possiamo conchiudere che il determinante dato è uguale alla somma di tanti determinanti formati tutti dal determinante dato nella maniera indicata. *Un determinante, in cui gli elementi di una linea sono espressioni polinomie, è uguale alla somma di determinanti in cui gli elementi sono espressioni monomie.*

10. *Un determinante non si altera se agli elementi di una linea si aggiungono quelli d'una linea parallela moltiplicati per un numero qualunque.*

Se, per fissare le idee, dal determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

formo

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{12}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + k\,a_{22}, & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + k\,a_{n2}, & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

per il teorema precedente, facendo in quest'ultimo determinante la scomposizione degli elementi binomii della prima colonna si ha il determinante primitivo più un altro determinante nel quale gli elementi della prima colonna sono eguali a quelli della seconda moltiplicati per k, e che quindi è zero.

11. *Se in un determinante gli elementi di una linea sono combinazioni lineari simili degli elementi di linee parallele, il determinante è zero.*

Se nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si ha

$$a_{11} = k\,a_{12} + h\,a_{13} + l\,a_{14} + \ldots$$
$$a_{21} = k\,a_{22} + h\,a_{23} + l\,a_{24} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1} = k\,a_{n2} + h\,a_{n3} + l\,a_{n4} + \ldots,$$

scomponendo in tanti determinanti ad elementi monomii, ognuno di questi sarà zero, perchè avrà gli elementi di una linea equimultipli di quelli di una linea parallela.

Il reciproco di questo teorema è anche vero, come sarà dimostrato in un' altra occasione.

§ 3. — Determinanti minori.

Dopo avere stabilito alcune fondamentali proprietà che risultano immediatamente dalla definizione di determinante, dobbiamo passare ad esaminare con quali mezzi più semplici si può calcolare un determinante.

Il concetto da cui saremo guidati è questo: di ridurre il calcolo di un determinante di un certo ordine n, al calcolo di altri determinanti di ordine inferiore.

Dobbiamo però premettere la teoria dei cosidetti *determinanti minori.*

Supponiamo dato un determinante di ordine n; sopprimiamo m linee scelte a piacere, e m colonne. Resterà un determinante di ordine $n-m$; questo determinante si chiama *un minore di or-*

dine $n - m$ del dato, ovvero un *sottodeterminante,* ovvero *determinante parziale*, o infine *determinante derivato.*

Ora dato un sistema di n^2 elementi disposti in quadrato, è interessante considerare accanto all'unico determinante formato con essi, anche tutti questi *determinanti minori* che si possono formare con alcuni di quelli elementi disposti nell'ordine assegnato.

Se il minore ha per elementi della diagonale principale, elementi appartenenti alla diagonale principale del determinante dato, si chiama *minore principale o diagonale.*

Cominciamo coll'esaminare quanti sottodeterminanti di un dato ordine esistono.

È evidente che di ordine $n - 1$ ne esistono tanti per quanti sono gli elementi cioè n^2. Perchè si può sopprimere una linea in n modi diversi, essendo le linee proprio in numero di n, e così in n modi diversi può farsi la soppressione di una colonna; ogni volta si ha un *minore* diverso; dunque si sono $n \,.\, n = n^2$ minori di ordine $n - 1$.

Con analogo ragionamento troviamo che potendosi sopprimere m linee in $\binom{n}{m}$ modi diversi, dove con $\binom{n}{m}$ si intende il coefficiente binomiale

$$\frac{n \,.\, n-1 \,.\,.\,.\, n-m+1}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, m},$$

e in altrettanti modi potendosi sopprimere m colonne, ii numero dei sottodeterminanti di ordine

$n - m$ è

$$\left[\binom{n}{m}\right]^2.$$

Esamineremo ora facilmente quanti *minori principali* di un dato ordine esistono. Per ottenerne uno di ordine m bisogna sopprimere $n - m$ coppie di linee e colonne che si incontrano sulla diagonale principale, il che può farsi in $\binom{n}{m}$ modi diversi. Dunque esistono $\binom{n}{m}$ minori principali di ordine m.

Diremo che un minore è di *classe pari o dispari* secondochè è pari o dispari la somma dei numeri d'ordine corrispondenti alle linee e alle colonne che formano quel minore.

Così nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sopprimendo la 2.ª e 3.ª linea, e la 2.ª e 4.ª colonna, resta il minore di 2.° ordine

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Esso è formato con elementi delle colonne 1, 3, e delle linee 1, 4; la somma di questi quattro nu-

meri è 9; dunque questo minore è di classe *dispari*.

Invece l'altro minore anche di 2.° ordine

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

è di classe *pari*.

Le m linee e m colonne che sopprimiamo in un determinante si intersecano in m^2 elementi del determinante stesso, i quali formano a loro volta un nuovo determinante che sarà anche un *minore* del dato; giacchè si otterrebbe anche esso lasciando le linee e colonne soppresse, e sopprimendo invece quelle linee e quelle colonne che si sono prima lasciate. Questo minore è di ordine m. Esso contiene elementi che non figurano nell'altro minore considerato avanti; è interessante studiare insieme tali due minori, che si chiamano l'uno *complementare* dell'altro.

Per es., i minori complementari dei due scritti poco fa, sono rispettivamente

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

È evidente prima di tutto che la somma degli ordini dei due minori l'uno complementare dell'altro è sempre eguale ad n.

Inoltre ci sarà facile dimostrare che le classi dei due minori complementari sono o ambedue pari o ambedue dispari.

Infatti sommando i numeri che rappresentano gli ordini delle linee e colonne contenute in un minore e nell'altro, poichè nel complesso dei due nuovi minori sono rappresentate, e una volta sola, tutte le linee e tutte le colonne, così si ha sempre per risultato

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

cioè un numero *pari*, e quindi resta dimostrato l'assunto.

È utile introdurre una denominazione. Dato un *minore* abbiamo definito che cosa è il suo *complementare*; ma se questo lo consideriamo col segno $+$ o $-$ secondochè è di classe pari o dispari, allora lo chiamiamo *aggiunto* o *complemento algebrico del minore dato.*

§ 4. — Sviluppo di un determinante per determinanti di ordine inferiore.

Consideriamo un minore di un determinante dato e il suo *complemento algebrico*.

Facciamo il prodotto dei due determinanti minori così ottenuti.

Il primo minore (quello di ordine $n - m$) sviluppato secondo la definizione conterrà $(n - m)!$ termini, e l'altro (quello di ordine m) conterrà $m!$

termini. Il prodotto di essi conterrà dunque

$$(n - m)!\ m!$$

termini.

Faremo vedere che ciascuno di questi termini, col medesimo segno con cui quì abbiamo fissato di considerarli, compare nello sviluppo del determinante dato.

Supponiamo che il minore di ordine m sia formato colle linee di ordine

$$s_1\ s_2\ \dots\ s_m$$

e colle colonne di ordine

$$r_1\ r_2\ \dots\ r_m$$

dove per le definizioni del § precedente si ha

$$s_1 < s_2 < \dots < s_m$$
$$r_1 < r_2 < \dots < r_m.$$

Il minore complementare sarà formato con elementi presi in quelle linee e in quelle colonne i cui ordini non figurano fra i numeri s e r.

Sieno rispettivamente e ordinatamente

$$s'_1 < s'_2 \dots < s'_{n-m}$$
$$r'_1 < r'_2 \dots < r'_{n-m}$$

i numeri d'ordine delle linee e colonne del minore complementare di ordine $n - m$.

L'assieme dei numeri s e s' forma una permutazione dei numeri $1, 2, \dots n$, e così per i numeri r, r'.

Un termine del prodotto dei due minori sarà evidentemente un prodotto di n elementi del determinante dato, di cui due non appartengono mai ad una stessa colonna o linea, quindi a meno del segno, sarà un termine dello sviluppo del determinante dato. Esso sarà in generale del tipo

$$a_{s_1\rho_1}\ a_{s_2\rho_2}\ \ldots\ a_{s_m\rho_m} \times a_{s'_1\rho'_1};\ \ldots\ a_{s'_{n-m}\rho'_{n-m}}$$

dove con $\rho_1\ \rho_2\ \ldots\ \rho_m$ si intende una permutazione dei numeri $r_1\ r_2 \ldots r_m$, e con $\rho'_1\ \rho'_2 \ldots \rho'_{n-m}$ si intende una permutazione dei numeri $r'_1\ r'_2 \ldots r'_{n-m}$. Supposto che nella permutazione $\rho_1\ \rho_2 \ldots \rho_m$ vi sieno ρ inversioni, e in quella $\rho'_1\ \rho'_2\ \ldots\ \rho'_{n-m}$ ve ne sieno ρ', il segno di quel termine sarà intanto quello di

$$(-1)^{\rho+\rho'}$$

e inoltre, per la convenzione fatta, cioè di mutare il segno al prodotto se si tratti di due minori di classe dispari, cioè se

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_m + r_1 + r_2 + \ldots + r_m$$

è dispari, il segno definitivo di quel termine sarà quello di

$$(-1)^{\rho+\rho'+s_1+\ldots+s_m+r_1+\ldots+r_m}.$$

Esaminiamo ora invece con che segno bisognerà prendere quel termine considerato come appartenente allo sviluppo del determinante dato.

Il segno dipenderà dal numero delle inversioni contenute nelle permutazioni.

$$\begin{array}{l} s_1\ s_2\ \ldots\ s_m\quad s'_1\ s'_2\ \ldots\ s'_{n-m} \\ \rho_1\ \rho_2\ \ldots\ \rho_m\quad \rho'_1\ \rho'_2\ \ldots\ \rho'_{n-m}. \end{array}$$

Ora le s fra loro non formano inversioni perchè sono disposte in ordine crescente, e così le s'. Invece le s possono formare inversioni colle s'. Queste inversioni si possono calcolare così: s_1 formerà inversioni con $s_1 - 1$ numeri minori di esso, e poichè $s_2 \ldots s_m$ sono tutti maggiori di s_1, così tali numeri si troveranno tutti fra gli s'. Così s_2 formerà inversioni con $s_2 - 1$ numeri minori di esso, ma poichè s_1 è uno di questi, così ne restano fra gli s' solo $s_2 - 2$. E così di seguito; si ricava infine che il numero delle inversioni che le s formano colle s' è:

$$s_1 - 1 + s_2 - 2 + s_3 - 3 + \ldots + s_m - m =$$
$$= s_1 + s_2 + \ldots + s_m - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Esaminiamo ora le inversioni formate fra le $\rho\, \rho'$. Esse saranno prima le inversioni che formano le ρ fra loro, e che precedentemente abbiamo indicato con ρ; poi quelle che formano fra loro le ρ', e che sono in numero di ρ'; e finalmente quelle che le ρ formano colle ρ'.

Queste ultime si possono calcolare osservando che il loro numero non varia se permuto le ρ fra loro in qualunque modo, p. es., se le distribuisco in ordine crescente di grandezza. Allora il loro numero si calcola colla stessa considerazione fatta ultimamente a proposito delle s, e si trova che esso è:

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Dunque il segno che cerchiamo è quello di

$$(-1)^{\varrho+\varrho'+s_1+\ldots+s_m+\varrho_1+\varrho_2+\ldots+\varrho_m}$$

osservando che $m(m+1)$ è certamente un numero pari.

Ora essendo

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$$

perchè le ρ sono le stesse r ma in ordine diverso, si ricava finalmente che il segno con cui bisogna prendere il termine

$$a_{s_1\varrho_1} \ldots a_{s_m\varrho_m} \quad a_{s'_1\varrho'_1} \ldots a_{s'_{n-m}\varrho'_{n-m}}$$

nello sviluppo del determinante dato è lo stesso del segno con cui questo termine, per le convenzioni fatte, comparisce nel prodotto dei due sottodeterminanti complementari.

Resta con ciò dimostrato *che un tal prodotto col segno + o — secondochè i sottodeterminanti sono di classe pari o dispari, è una parte del determinante dato.*

Consideriamo ora m linee o m colonne. Il numero dei sottodeterminanti di ordine m contenuti in quelle linee o colonne è evidentemente

$$\binom{n}{m}.$$

Moltiplicando ciascuno di essi per i loro sottodeterminanti complementari e dando al prodotto il segno + o — secondo la solita regola, si hanno in tutto

$$\binom{n}{m}(n-m)!\ m! = n!$$

termini, tutti fra loro diversi, perchè due minori contenuti nelle m linee scelte differiscono fra loro sempre almeno per una colonna. Intanto tutti questi termini, per le dimostrazioni fatte, appartengono tutti al determinante dato, il quale d'altra parte ne ha solo $n!$ e non più, dunque possiamo conchiudere che in tal maniera si vengono ad ottenere *tutti* i termini del determinante dato. Cioè:

Un determinante è eguale alla somma dei prodotti dei minori contenuti in m linee o colonne (m qualunque) per i loro complementari, dando a ciascun prodotto il segno + o — *secondochè i minori che si moltiplicano sono di classe pari o dispari;* colla denominazione introdotta avanti si può dire più brevemente: *un determinante è eguale alla somma dei prodotti dei minori contenuti in m linee per i loro complementi algebrici.*

Facendo in particolare $m = 1$ ci riduciamo a considerare tutti i minori contenuti in una sola linea; tali minori sono gli elementi stessi, e la loro classe si ottiene sommando gli indici che rappresentano il posto di quell'elemento.

Abbiamo dunque:

Un determinante è eguale alla somma algebrica dei prodotti degli elementi di una linea o colonna, per i rispettivi complementi algebrici.

§ 5. — Proprietà dei minori di un determinante.

È notevole il seguente teorema sui minori di un determinante.

Abbiamo dimostrato che la somma dei prodotti degli elementi di una linea (o colonna) per i loro rispettivi complementi algebrici è eguale al determinante dato. Chiamando D il determinante e

$$a_{r1} \; a_{r2} \; . \; . \; . \; a_{rn}$$

gli elementi di una linea, e

$$A_{r1} \; A_{r2} \; . \; . \; . \; A_{rn}$$

i complementi algebrici, si ha la relazione:

$$a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \ldots + a_{rn} A_{rn} = D.$$

Ora consideriamo una linea parallela alla linea considerata, cioè

$$a_{s1} \; a_{s2} \; . \; . \; . \; a_{sn}$$

dove s sia diverso da r, e consideriamo i complementi algebrici corrispondenti

$$A_{s1} \; A_{s2} \; . \; . \; . \; A_{sn}.$$

È facile far vedere che

$$a_{r1} A_{s1} + \; . \; . \; . \; + a_{rn} A_{sn} = 0.$$

Giacchè il primo membro di questa espressione può considerarsi come lo sviluppo di un determinante che si ottiene dal determinante dato togliendo la linea s^{ma} e sostituendovi gli stessi elementi della linea r^{ma}; si ha allora lo sviluppo di un determinante identicamente zero perchè ha due linee parallele identiche.

Possiamo dunque dire:

È zero la somma dei prodotti degli elementi di una linea per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di una linea parallela.

Questo teorema può generalizzarsi alla somma di prodotti di minori.

Consideriamo m linee parallele; i minori in esse contenuti, e i loro rispettivi complementi algebrici. Consideriamo un sistema di altre m linee parallele alle prime, e diverso dal primo sistema, perchè contenente *almeno* una linea diversa. I minori contenuti in queste nuove m linee, si possono far corrispondere uno ad uno ai minori delle m linee di prima, considerando come corrispondenti quei minori racchiusi fra le stesse colonne. Si può ora dimostrare che *è zero la somma dei prodotti dei minori contenuti in m linee per i complementi algebrici dei corrispondenti minori contenuti nelle altre m linee parallele.*

In effetti supponiamo, per fissare le idee, che si sieno considerati i minori contenuti nelle m linee di ordini

$$\mu_1 \ \mu_2 \ . \ . \ . \ \mu_m$$

e che poi il secondo sistema di m linee sia costituito dalle linee di ordini

$$\nu_1 \ \nu_2 \ . \ . \ . \ \nu_m$$

(dove *alcune* delle ν possono essere ancora *alcune* delle μ). Chiamando $M_1\, M_2 \ldots$ i minori contenuti nelle linee di ordine $\mu_1 \ldots \mu_m$, e chiamando M_1' $M_2' \ldots$ i loro complementi algebrici, il valore del determinante è

$$M_1\, M_1' + M_2\, M_2' + \ldots$$

Indicando invece con $N_1\, N_2 \ldots$ i minori contenuti nelle linee di ordini $\nu_1\, \nu_2 \ldots \nu_m$, l'espressione

$$N_1\, M_1' + N_2\, M_2' + \ldots$$

non è altro che il valore di un determinante che si ricaverebbe dal dato, sopprimendo le linee di ordini $\mu_1 \ldots \mu_m$, e al loro posto ponendo linee eguali, nei loro elementi, a quelle degli ordini $\nu_1 \ldots \nu_m$. Un tal determinante verrà allora per necessità ad avere almeno due linee parallele eguali, perchè i due sistemi di m linee differivano *almeno per una linea.* Quindi esso è zero, e perciò è zero la espressione:

$$N_1\, M_1' + N_2\, M_2' + \ldots$$

come si volea dimostrare.

Un'altra proprietà riguardante i minori è la seguente:

Indichiamo con A_{rs} il complemento algebrico di un elemento a_{rs}. In A_{rs} si intende quindi incluso il segno che ad esso compete.

Se il determinante è zero allora i complementi algebrici degli elementi di una linea (o colonna) sono proporzionali a quelli degli elementi di una qualunque altra linea (o colonna) parallela.

In formola si ha

$$\frac{A_{r1}}{A_{s1}} = \frac{A_{r2}}{A_{s2}} = \ldots = \frac{A_{rn}}{A_{sn}}.$$

Il complemento algebrico A_{r1} può scriversi nella seguente maniera

$$A_{r1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \ldots & a_{r-1,n} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

il qual determinante si ottiene dal dato sopprimendo l'antica linea r^{ma} e ponendo al suo posto la linea formata cogli elementi

$$1, 0, 0, \ldots . 0$$

Se moltiplichiamo per A_{sk} una colonna qualunque, si ottiene il prodotto $A_{r1} A_{sk}$. D'altra parte supposto di moltiplicare per A_{sk} la colonna k^{ma}, e aggiungendo poi agli elementi di essa così modificati, gli elementi della prima colonna moltiplicati per A_{s1}, quelli della seconda moltiplicati per A_{s2}, e così di seguito, gli elementi di tale colonna k^{ma} diventano tutti zero meno uno, perchè si hanno

le relazioni

$$a_{11} A_{s1} + \dots + a_{1k} A_{sk} + \dots + a_{1n} A_{sn} = 0$$

. . . .

$$a_{s1} A_{s1} + \dots + a_{sk} A_{sk} + \dots + a_{sn} A_{sn} = D = 0$$

. . . .

L'elemento situato alla linea r^{ma} risulta invece semplicemente A_{s1}.

Quindi lo sviluppo di un tal determinante così modificato sarà A_{s1} moltiplicato per il complemento algebrico dell'elemento appartenente alla colonna k^{ma} e alla linea r^{ma}, cioè A_{rk}; abbiamo quindi la relazione

$$A_{r1} A_{sk} = A_{s1} A_{rk}$$

cioè

$$\frac{A_{r1}}{A_{s1}} = \frac{A_{rk}}{A_{sk}}.$$

Facendo $k = 2, 3, \dots n$ si hanno tutte le relazioni precedenti.

Introducendo i minori di 2.° ordine, un determinante D di ordine n può porsi sotto la forma di un determinante di ordine n — 1.

In effetti dall' ultima colonna moltiplicata per a_{1n-1} togliamo la precedente moltiplicata per a_{1n}; poi dalla penultima moltiplicata per a_{1n-2} togliamo la $n - 2^{ma}$ moltiplicata per a_{1n-1} e così di seguito; si ha allora un determinante in cui gli elementi della 1.ª linea sono tutti zero, meno il primo e quindi

(poichè poi il determinante è restato moltiplicato per $a_{1n-1} a_{1n-2} \dots a_{11}$) si ha, sopprimendo il fattore a_{11} al primo e secondo membro,

$$a_{12} \dots a_{1n-1} D = \begin{vmatrix} (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}), \dots (a_{2n}a_{1n-1} - a_{2n-1}a_{1n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

Così D, a meno di un fattore, resta espresso con un determinante di ordine $n - 1$, i cui elementi sono minori di 2.° ordine.

Se quindi supponiamo che tutti i minori di 2.° ordine di un dato determinante sieno divisibili per p, *(senza che lo siano gli elementi) allora è chiaro che il determinante dato è divisibile per* p^{n-1} (Janni, *Teoremi sui determinanti*, Giorn. di Batt. XII p. 142).

Questo teorema può ritenersi come un'estensione dell'altro che se tutti gli elementi di un determinante di ordine n, sono divisibili per p, il determinante è divisibile per p^n.

§ 6. — Moltiplicazione di due determinanti.

Il prodotto di due determinanti dello stesso ordine si può esprimere mediante un determinante del medesimo ordine. La dimostrazione di questa proprietà e la regola semplice per formare i vari elementi del nuovo determinante, formano lo scopo di questo paragrafo.

Sieno i due determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Il loro prodotto potrà esprimersi col determinante unico di ordine $2n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

dove si intende che il quadrato di elementi situato alla destra del quadrato delle a, contiene tutti gli elementi zero, meno quelli della diagonale principale che sono eguali a -1, e il quadrato a sinistra delle b contiene tutti gli elementi zero.

Se sviluppo questo determinante per prodotti di minori contenuti nelle prime n linee, osservando che di tali minori non ce n'è che uno solo diverso da zero, che è il determinante delle a, e che il suo complemento algebrico è, col segno $+$, esat-

tamente il determinante delle b, si ricava che appunto il determinante così formato è eguale al prodotto dei due dati. Ora con una facile trasformazione di determinanti possiamo ricondurre questo ad uno di ordine n^{mo}.

In effetti, agli elementi della prima colonna aggiungiamo quelli della colonna $n+1^{ma}$ moltiplicati per a_{11}, poi quelli della $n+2^{ma}$ moltiplicati per a_{21}, ecc., quelli della $2\,n^{ma}$ moltiplicati per a_{n1}. Il determinante non resterà alterato, e gli elementi della prima colonna diventano rispettivamente

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{11}\,b_{11} + a_{21}\,b_{12} + \ldots + a_{n1}\,b_{1n} \\ a_{11}\,b_{21} + a_{21}\,b_{22} + \ldots + a_{n1}\,b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}\,b_{n1} + a_{21}\,b_{n2} + \ldots + a_{n1}\,b_{nn} \end{array}$$

Aggiungiamo ora ancora agli elementi della seconda colonna quelli della $n+1^{\rm ma}$, $n+2^{\rm ma}$, ... $2\,n^{\rm ma}$ rispettivamente moltiplicati per $a_{12}\,a_{22}\ldots a_{n2}$. Gli elementi della seconda colonna diventeranno

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{12}\,b_{11} + a_{22}\,b_{12} + \ldots + a_{n2}\,b_{1n} \\ a_{12}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22} + \ldots + a_{n2}\,b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{12}\,b_{n1} + a_{22}\,b_{n2} + \ldots + a_{n2}\,b_{nn} \end{array}$$

Così seguitando si vede che il determinante resta trasformato in un altro anche di ordine $2n$, ma nel quale al posto che prima occupavano le a compaiono elementi zero, e al posto degli zeri che prima erano al disotto del quadrato delle a, ora compariscono delle espressioni bilineari omogenee in a e b. Propriamente ponendo

$$c_{ik} = a_{1k} b_{i1} + a_{2k} b_{i2} + \dots + a_{nk} b_{in}$$

possiamo dire che il determinante resta trasformato in quest'altro

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Sviluppando questo determinante per prodotti di minori contenuti nelle prime n linee, e osservando che in tali linee, di minori diversi da zero, non c'è altro che il determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

il cui valore è $(-1)^n$, e che il complemento algebrico di questo, è il determinante delle c col se-

gno di

$$(-1)^{1+2+\dots+n+(n+1)+\dots+2n} =$$
$$= (-1)^{n.n+1+n.n} = (-1)^n$$

si conclude che il valore del determinante precedente è esattamente

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

che è un determinante di ordine n.

Resta con ciò anche trovata *la legge di formazione del determinante prodotto; i termini della sua prima linea si formano facendo la somma dei prodotti degli elementi della prima linea di uno dei determinanti dati, per gli elementi della prima, seconda, ecc. n^{ma} colonna dell' altro determinante; intendendo di moltiplicare fra loro solo gli elementi che occupano posti omonimi nella linea e nella colonna; così i termini della seconda linea si formano facendo la somma dei prodotti degli elementi della 2.ª linea del primo, per gli elementi della 1.ª 2.ª, ... n^{ma} colonna dell' altro*, e *così seguitando.*

Secondo questa regola, dobbiamo combinare le *linee* del primo determinante colle *colonne* del secondo; è naturale però che da questa regola, se ne può ricavare subito un' altra per la quale si combinino nel solito modo le *linee* del primo determinante colle *linee* del secondo, ovvero le *colonne* colle *colonne*.

In effetti noi possiamo, se ci piace, scambiare nel secondo determinante le linee colle colonne, e allora la combinazione delle linee del primo determinante colle colonne del secondo, diventa la combinazione delle linee del primo colle linee del secondo.

In tal maniera il determinante prodotto può assumere *quattro* forme diverse, perchè si possono combinare le linee del primo colle linee del secondo, o le linee del primo colle colonne del secondo, o le colonne del primo colle linee del secondo, o finalmente le colonne del primo colle colonne del secondo.

La regola qui dimostrata vale per il prodotto di due determinanti dello stesso ordine. Ma se i due fattori sono di ordine diverso, allora si può anche applicare la stessa regola purchè si abbia l'avvertenza di rendere prima i due determinanti dello stesso ordine, cioè di aggiungere opportunamente a quello di ordine minore tante linee e altrettante colonne, da raggiungere l' ordine dell'altro, e in maniera che il suo valore resti inalterato.

Su di un esempio apparirà meglio la cosa.

Si abbia da moltiplicare un determinante di 5.° ordine per uno di 2.° ordine

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Questo può subito porsi sotto forma di un determinante di 5.° ordine scrivendolo nel seguente

modo:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Per la regola nota dello sviluppo di un determinante, quest'ultimo determinante è eguale al dato di 2.° ordine.

Se i due determinanti dati sono identici, allora si ottiene colla regola indicata il quadrato di un determinante. Sieno a_{rs} gli elementi del determinante dato e c_{rs} quelli del quadrato.

L'elemento c_{rs} e p. es., la somma dei prodotti degli elementi della r^{ma} linea per gli elementi della s^{ma} linea; mentre c_{sr} è la somma dei prodotti degli elementi della s^{ma} linea per quelli della r^{ma} linea, cioè

$$c_{rs} = c_{sr}.$$

Chiamando *coniugati* quei due elementi di un determinante qualunque, nei quali gli indici sono gli stessi ma scambiati fra loro, ricaviamo che:

il quadrato di un dato determinante è un determinante nel quale sono eguali a due a due gli elementi coniugati.

Determinanti cosiffatti si chiamano simmetrici e saranno studiati in seguito.

Per la regola di moltiplicazione dei determinanti si veda Binet, *Journal de l'École Polyt.*, XVI, p. 280; Cauchy, *Idem*, XVII, p. 29.

§ 7. — Determinante prodotto di due matrici rettangolari.

Lo studio della formazione del determinante prodotto di due dati ci conduce a introdurre una notazione e un concetto nuovo.

Sieno c_{rs} gli elementi del prodotto C; a_{rs}, b_{rs} quelli dei determinanti dati, A, B. Consideriamo per fissare le idee il seguente minore di C

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Supponiamo che il prodotto C sia stato fatto *moltiplicando* A, B *per linee*. Allora l' elemento c_{rs} è dato da:

$$c_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \dots + a_{rn} b_{sn}.$$

Il minore soprascritto può simbolicamente rappresentarsi nel seguente modo.

Chiamiamo *matrice rettangolare* una tabella nella quale sieno scritti, disposti in rettangolo, $m\,n$ elementi; cioè vi sieno m linee ognuna risultante di n elementi. Se $m = n$ allora si ha la *matrice quadrata*, come l'abbiamo già introdotta nei paragrafi precedenti.

Consideriamo due di queste *matrici rettangolari* così formate

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

e

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}. \end{matrix}$$

Se noi combiniamo la prima linea dell'una colla prima linea dell' altra, nello stesso modo con cui si procede per fare il prodotto di due determinanti, cioè formiamo la somma dei prodotti degli elementi della prima linea dell'una per gli elementi della prima linea dell'altra; poi nello stesso modo combiniamo la prima linea dell'una per la seconda dell' altra, e così seguitando, otteniamo evidentemente in tutto $m \,.\, m = m^2$ elementi, che sono esattamente quelli del soprascritto minore di C.

Questa osservazione è fondamentale, perchè ci dà in certo modo il mezzo di *rappresentare* il minore di C mediante le due matrici rettangolari soprasegnate.

Per definizione chiameremo prodotto per linee delle due matrici rettangolari, il determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

E quindi allora ricaviamo:

ogni minore del determinante prodotto di due altri, è il prodotto di due matrici rettangolari.

La matrice rettangolare da sè sola non ha nessun significato di quantità; *è il prodotto* di due simili matrici che acquista, per la data definizione un significato ben definito.

Inoltre perchè si possa parlare di *prodotto* di due matrici rettangolari, è necessario, per le cose dette, che esse sieno composte dello stesso numero di linee, e dello stesso numero di colonne.

Il prodotto che abbiamo effettuato, si può chiamare, per analogia colle cose dette, a proposito del prodotto di due determinanti, *un prodotto eseguito per linee*. In tal caso si ha un determinante di ordine m, essendo m il numero delle linee delle matrici ($m < n$).

Naturalmente ci viene allora anche l'idea di eseguire il prodotto per colonne, e allora otterremmo un determinante di ordine n, perchè n è il numero delle colonne. Lo stesso determinante si otterrebbe se nelle due matrici invertiamo prima le linee colle colonne, e poi eseguiamo ancora il prodotto per *linee*; ma allora le due matrici da cui partiamo hanno un numero di linee superiore al numero delle colonne.

La ricerca che ci si presenta ora è questa: studiare in generale il determinante formato nella indicata maniera, *moltiplicando per linee* due matrici rettangolari di m linee e n colonne, dove m sia minore o maggiore di n.

I due teoremi che troveremo sono estremamente rimarchevoli.

Incominciamo coll'osservare che il prodotto *per linee* delle due matrici, può in ogni caso scriversi sotto la forma del seguente determinante di ordine $m+n$: (SARDI, *Nuova dimostrazione del prodotto di due matrici*, Giorn. di Batt. V-1867, p. 174)

$$P=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & \dots & a_{m2} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

In effetti procedendo, come abbiamo fatto nel § precedente, cioè aggiungendo alla 1.ª colonna la $m+1^{\text{ma}}$ moltiplicata per a_{11}, la $m+2^{\text{ma}}$ moltiplicata per a_{12}, ecc., ecc., si riconosce subito che questo determinante si trasforma in un altro che si riduce subito a quello di ordine m e che rappresenta per definizione il prodotto per linee delle due matrici.

Ora distinguiamo i due casi $m<n$, e $m>n$. Eseguiamo lo sviluppo di quel determinante per prodotti dei minori contenuti nelle prime m colonne. Se $m>n$, tali minori vengono tutti a contenere una linea formata con elementi zero, e quindi sono tutti zero, e perciò possiamo subito conchiudere:

Se $m>n$ il prodotto per linee delle due matrici rettangolari di m linee e n colonne, è zero.

Supponiamo invece l'altro caso, $m < n$. Allora è più facile procedere in altro modo.

Il determinante prodotto delle due matrici può decomporsi (per il teorema sui determinanti ad elementi polinomii) nella somma di m^n determinanti della forma

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1}\, b_{1r_1}, & a_{1r_2}\, b_{2r_2}, & \dots & a_{1r_m}\, b_{mr_m} \\ a_{2r_1}\, b_{1r_1}, & a_{2r_2}\, b_{2r_2}, & \dots & a_{2r_m}\, b_{mr_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mr_1}\, b_{1r_1}, & a_{mr_2}\, b_{2r_2}, & \dots & a_{mr_m}\, b_{mr_m} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{1r_1}\, b_{2r_2} \dots b_{mr_m} \begin{vmatrix} a_{1r_1} & a_{1r_2} & \dots & a_{1r_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mr_1} & a_{mr_2} & \dots & a_{mr_m} \end{vmatrix}$$

dove $r_1\, r_2 \dots r_m$ rappresentano una disposizione ad m ad m con ripetizione degli n indici $1, 2, \dots n$. Facendo variare $r_1\, r_2 \dots r_m$ in tutti i modi possibili e sommando si ha il determinante prodotto.

Ora osserviamo in primo luogo che quando due o più degli r sono fra loro eguali, allora il risultato è zero; quindi basterà limitarsi alle disposizioni *senza ripetizioni* degli n indici ad m ad m. Inoltre facciamo il sommatorio estendendolo prima a tutte le possibili $m!$ permutazioni dei *medesimi* indici r. Il valore assoluto del determinante delle a resta in ogni caso invariato, e solo muta il suo segno, il quale sarà $+$ o $-$ secondochè è di classe pari o dispari la permutazione che si fa sugli r.

Si ha allora

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} & \dots & a_{1r_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{mr_1} & \dots & a_{mr_m} \end{vmatrix} \Sigma \pm b_{1r_1} b_{2r_2} \dots b_{mr_m}$$

cioè il prodotto

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} & \dots & a_{1r_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{mr_1} & \dots & a_{mr_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1r_1} & \dots & b_{1r_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{mr_1} & \dots & b_{mr_m} \end{vmatrix}.$$

Questo prodotto è quello di due minori *omologhi* (formati colle omonime colonne) nelle due matrici date. Facendo variare in tutti i possibili modi gli indici $r_1 \dots r_m$ scelti fra $1, 2, \dots n$ e sommando si ha la somma dei prodotti dei minori omologhi contenuti nelle due matrici, cioè:

Il prodotto per linee di due matrici rettangolari ad n colonne ed m linee, dove sia $m < n$, è eguale alla somma dei prodotti dei minori di ordine m contenuti in una matrice, per gli omologhi contenuti nell'altra.

Abbiamo già detto che ogni minore del determinante prodotto di due altri, si può esprimere come prodotto di due matrici rettangolari scelte nei due determinanti. È facile ora fissare con che legge si devono scegliere queste due matrici. Supponiamo che si tratti di un prodotto ottenuto combinando le linee colle linee.

Consideriamo il minore di ordine m che ha per elementi della diagonale principale gli elementi

$$c_{r_1 s_1},\ c_{r_2 s_2},\ \dots\ c_{r_m s_m}.$$

È facile verificare che questo minore si otterrà moltiplicando per linee la matrice rettangolare contenuta nel primo determinante e avente per linee quelle di ordini $r_1\, r_2 \ldots r_m$ colla matrice rettangolare contenuta nel secondo e avente per linee quelle di ordini $s_1\, s_2 \ldots s_m$.

Se quindi nel determinante delle c, consideriamo un minore di cui gli elementi diagonali sieno anche tutti elementi diagonali del determinante totale (un *minore* che potrebbe chiamarsi *minore diagonale* o *principale*) allora le $s_1\, s_2 \ldots s_m$ sono tutte eguali rispettivamente a $r_1\, r_2 \ldots r_m$, e quindi allora le matrici rettangolari da scegliere nei due determinanti sono formate colle linee aventi gli stessi numeri d'ordine, cioè sono *matrici omologhe.*

§ 8. — Determinanti reciproci.

Dato un determinante, a tutti i suoi elementi corrisponde un complemento algebrico; quindi esistono n^2 complementi algebrici che chiameremo A_{rs}.

Il determinante formato con questi, cioè

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

si chiama il *reciproco* del determinante dato. Esistono dei teoremi assai rimarchevoli che stabiliscono le relazioni fra il *reciproco* e il dato.

È utile notare che il determinante sarebbe lo stesso in valore e in segno se le A_{rs} in luogo di rappresentare i complementi *algebrici* rappresentassero solo i complementi degli elementi; infatti ciò equivarrebbe a mutare segno agli elementi che occupano posti *dispari* (v. § 2). Per le dimostrazioni seguenti è però utile che le A rappresentino i complementi *algebrici*.

Prima di tutto, se il determinante dato ha valore zero, sappiamo che i complementi algebrici degli elementi di una linea sono proporzionali a quelli degli elementi di una linea parallela. Onde nel determinante reciproco gli elementi di due linee o colonne, sono proporzionali, e questo basta per conchiudere che il determinante reciproco è zero.

Inoltre qualunque *minore* appartenente al determinante reciproco (meno naturalmente i minori di primo ordine, che sono gli elementi stessi) ha anche proporzionali fra loro gli elementi di due qualunque linee, e quindi possiamo infine conchiudere:

Se un determinante è zero, il suo reciproco e tutti i minori di questo (sino a quelli di 2.° ordine) sono anche zero.

Esiste un teorema assai semplice che dà senza altro il valore del reciproco di un determinante dato. Facciamo il prodotto di un determinante per il suo reciproco. Si ha colla nota regola

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}A_{11}+\ldots+a_{1n}A_{1n}, & a_{11}A_{21}+\ldots+a_{1n}A_{2n}, & \ldots a_{11}A_{n1}+\ldots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+\ldots+a_{2n}A_{1n}, & a_{21}A_{21}+\ldots+a_{2n}A_{2n}, & \ldots a_{21}A_{n1}+\ldots+a_{2n}A_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}A_{11}+\ldots+a_{nn}A_{1n}, & a_{n1}A_{21}+\ldots+a_{nn}A_{2n}, & \ldots a_{n1}A_{n1}+\ldots+a_{nn}A_{nn} \end{vmatrix}$$

Ora per i noti teoremi sui minori di un determinante, si ricava che in questo, meno gli elementi della diagonale principale, tutti gli altri sono zero. Gli elementi della diagonale principale sono poi eguali al valore del determinante dato, che chiameremo D.

Chiamando quindi R il reciproco si ha

$$R\,D = D^n$$

donde

$$R = D^{n-1}.$$

Si ricava cioè questo importante e semplice teorema:

Il reciproco di un determinante ha per valore la potenza $n-1^{\text{ma}}$ *del dato.*

Esaminiamo ora come si possono esprimere i minori di R, mediante quelli di D.

Possiamo stabilire una corrispondenza fra i minori di D e quelli di R; intendendo corrispondenti quei minori che in D e R sono racchiusi da linee e colonne che hanno gli stessi numeri d'ordine. Due siffatti minori li chiameremo *omologhi.*

Per maggiore semplicità consideriamo prima il minore di ordine m contenuto nelle prime m colonne, e nelle prime m linee del reciproco R.

Esso è

$$M = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{vmatrix}$$

che moltiplicheremo per il determinante dato. Naturalmente coll'aggiunzione opportuna di linee e colonne, ridurremo questo minore all'ordine n.

Propriamente ci converrà porre il prodotto sotto la forma seguente:

$$\begin{vmatrix} A_{11} \dots A_{1m} & A_{1m+1} \dots A_{1n} \\ \dots & \dots \\ A_{m1} \dots A_{mm} & A_{mm+1} \dots A_{mn} \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

dei quali due determinanti il primo non è altro che il minore M, come si vede immediatamente.

Il prodotto di quei due determinanti è

$$\begin{vmatrix} D & 0 & \dots 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & D & \dots 0 & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots D & 0 & \dots 0 \\ a_{1,m+1} & a_{2,m+1} & \dots a_{m,m+1} & a_{m+1,m+1} & \dots a_{n,m+1} \\ a_{1,m+2} & a_{2,m+2} & \dots a_{m,m+2} & a_{m+1,m+2} & \dots a_{n,m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{m,n} & a_{m+1,n} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sviluppando questo determinante secondo i minori contenuti nelle prime m linee si ha

$$D^m \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{n,m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+1,n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e il determinante che qui comparisce non è altro che l'omologo N nel determinante dato del complemento algebrico di M nel determinante reciproco.

Si ha dunque

$$M \, . \, D = D^m \, . \, N$$

donde

$$M = N \, . \, D^{m-1}.$$

Questo risultato ottenuto per lo speciale minore M, si può estendere a qualunque altro minore; giacchè qualunque altro minore di ordine m in R, con opportuno spostamento di linee e colonne (che non fa che alterare, al massimo, il segno di R) si può ridurre ad avere la posizione di M in R, e allora spostando in modo simile le linee e le colonne di D, si potrebbe conchiudere lo stesso risultato. Possiamo dunque in generale dire:

Un qualunque minore M di ordine m, contenuto nel determinante reciproco R, è eguale al minore omologo in D del complemento algebrico di M in R, moltiplicato per la potenza $m-1^{ma}$ del determinante dato.

Per i minori di ordine $n-1$ si ha:

Il complemento di un elemento A_{rs} di R è eguale al corrispondente elemento a_{rs} di D, moltiplicato per la potenza $n - 2^{ma}$ di D stesso.

Quest'ultimo teorema mostra che se di un determinante D formo il reciproco R, e poi di questo formo ancora il reciproco, ottengo, a meno di un fattore (che è $D^{n\,(n-2)}$) di nuovo il determinante D da cui sono partito.

In tutto ottengo

$$D^{n^2-2n+1} = D^{(n-1)^2}.$$

È da ciò che resta giustificata la denominazione di *reciproco* data al determinante R; i due determinanti D ed R stanno fra loro in perfetta reciprocità.

Dal teorema superiore risulta anche subito che *se in D un minore è zero, il complemento del suo omologo in R è anche zero*, teorema per il quale non occorrono quindi le dimostrazioni contenute in Giorn. di Batt., vol. XII, p. 142.

Un altro teorema sui determinanti reciproci è il seguente:

Si abbiano due determinanti dello stesso ordine D, D', e si moltiplichino fra loro in uno dei quattro modi possibili, p. es., per fissare le idee, si moltiplichino per linee (cioè combinando le linee per le linee); si faccia nello stesso modo il prodotto dei loro reciproci R, R'; si otterranno due determinanti P, Q, di cui il secondo è reciproco del primo.

Che il prodotto Q debba essere reciproco di P

come *valore*, si vede subito ricordando che

$$R = D^{n-1}$$
$$R' = D'^{n-1}$$

e quindi

$$Q = R\,R' = (D\,D')^{n-1} = P^{n-1}$$

e infatti sappiamo che il reciproco di P ha appunto per valore P^{n-1}.

La quistione però è di mostrare che Q *anche nei suoi singoli elementi* risulta il reciproco di P.

Gli elementi di D sieno a_{rs}, e quelli di D' sieno a'_{rs}; quelli di R, R' sieno rispettivamente A_{rs}, A'_{rs}. Indichiamo poi con b_{rs}, B_{rs} gli elementi dei prodotti P, Q rispettivamente.

Il complemento di b_{rs} in P è, come si sa dal § precedente, il determinante formato dal *prodotto per linee* delle due *matrici rettangolari* che si ottengono da D e D' quando in essi si sopprimono rispettivamente le linee r^{ma} e s^{ma}. Per avere poi il complemento algebrico bisogna moltiplicare ancora per $(-1)^{r+s}$.

Per un teorema sul prodotto delle matrici si ricava che tal prodotto è eguale alla somma dei prodotti dei determinanti omologhi di ordine $n-1$ contenuti in quelle matrici.

Poichè i determinanti contenuti in quelle matrici sono rispettivamente

$$\begin{array}{ll} (-1)^{r+1}\,A_{r1}, & (-1)^{s+1}\,A'_{s1} \\ (-1)^{r+2}\,A_{r2}, & (-1)^{s+2}\,A'_{s2} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

così si ricava che il complemento di b_{rs} in P è

$$(-1)^{r+s}\left[A_{r1}\,A'_{s1}+A_{r2}\,A'_{s2}+\ldots+A_{rn}\,A'_{sn}\right]$$

e moltiplicando per $(-1)^{r+s}$ per avere il complemento algebrico, si ottiene esattamente l'elemento B_{rs} di Q. Con ciò il teorema è dimostrato.

PARTE II.

Ricerche speciali sui determinanti e applicazioni.

§ 9. — Altri metodi per lo sviluppo di un determinante. Regola di Laplace.

È nota sotto il nome di *regola di Sarrus* una regola per lo sviluppo di un determinante di 3.° ordine

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Si considerino gli elementi situati sopra trasversali parallele alle due diagonali, e si chiamino complementari quelle trasversali situate da parti opposte di una diagonale, e tali che la somma degli elementi in esse contenute sia 3. Così le due trasversali

$$a_{12} \quad a_{23}$$

e

a_{31}

sono complementari. Si moltiplichino fra loro tutti gli elementi contenuti nella trasversale principale (diagonale principale), e nelle trasversali fra loro complementari parallele alla diagonale principale; si hanno così tre termini dello sviluppo del determinante dato. Si faccia lo stesso colla diagonale secondaria, e colle trasversali complementari ad essa parallele: si hanno altri tre termini dello sviluppo, i quali altri tre termini bisogna prenderli col segno negativo.

L'assieme dei sei termini è lo sviluppo del determinante dato. Si fa dunque la somma dei prodotti (presi col segno +) degli elementi contenuti nella diagonale principale e delle trasversali complementari parallele a questa; e dei prodotti (presi col segno —) degli elementi contenuti nella diagonale secondaria, e di quelli contenuti nelle diagonali complementari parallele a questa.

Una estensione di questo metodo ai determinanti di ordine qualunque è data in un lavoro di Bonolis, *Di un nuovo metodo per sviluppare i determinanti di grado qualunque*, ecc. Giorn. di Batt., vol. XXI, p. 336. Non è però necessario fermarci su questa considerazione che ha poca importanza.

Citeremo ancora:

Teixeira, *Processos expeditos*, ecc. Journal des sciencias mathematicas, etc., Coimbra, 1894, vol. XI, pag. 88.

Teixeira, *Novo methodo de desenvolver os determinantes*, Id., Id., p. 173.

Una questione di un genere molto affine è trattata anche in un paragrafo di Albeggiani, Giorn. di Batt., vol. XIII, pag. 16 e seg.

Si tratta di stabilire delle regole pratiche per costruire i diversi termini dello sviluppo del determinante. In ogni modo si tratta sempre, lo ripetiamo, di ricerche a cui non si può attribuire che poco valore.

A proposito dello sviluppo di un determinante dobbiamo fare ancora un'altra osservazione.

Noi abbiamo detto che un determinante può svilupparsi in una somma di prodotti dei minori compresi in n_1 linee parallele per i loro rispettivi complementi algebrici. È naturale che applicando allora ripetutamente questo teorema si può giungere a quest'altro:

Sieno $n_1\, n_2 \ldots n_k$ numeri interi tali che

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n;$$

in un determinante di ordine n, scegliamo n_1 linee, poi altre n_2, poi altre n_3, e così di seguito; consideriamo un determinante qualunque contenuto nelle prime n_1 linee, poi uno contenuto nelle seconde n_2 linee, i cui elementi però non appartengano a colonne già considerate nella formazione del primo determinante, e così di seguito; la somma dei prodotti di tutte le siffatte combinazioni di k determinanti con segni opportuni sarà lo sviluppo del determinante dato.

Si potrebbe poi senza difficoltà trovare la regola riguardante il segno da dare a ciascuno di siffatti

prodotti parziali di k fattori. *Ogni termine avrà il segno + o — secondochè compete il segno + o — al prodotto di tutti gli elementi principali dei k determinanti che sono fattori di quel termine.*

Questa regola va sotto il nome di *Regola di Laplace* (v. LAPLACE, *Hist. de l' Acc. de Paris.* 1772, pag. 297; VANDERMONDE, *Ibid.*, pag. 518; JACOBI, *Crelle.* Vol. XXII; SCHERING, *Gött. Ges.*, 1877, IV).

§ 10. — SVILUPPO DI UN DETERMINANTE AD ELEMENTI POLINOMII.

Abbiamo già visto precedentemente che quando p. es. gli elementi della prima colonna in un determinante sono la somma dello stesso numero r di termini, allora il determinante è eguale alla somma di r determinanti parziali formati dal dato sostituendo in luogo degli elementi della prima colonna, gli elementi rappresentati dai primi termini di ciascuna somma; poi quelli rappresentati dai secondi termini, e così di seguito. Se ora supponiamo che anche gli elementi delle altre colonne sieno espressioni polinomie, allora ripetendo su ciascun determinante parziale consecutivamente lo stesso procedimento si può giungere infine ad una somma di determinanti dove ogni elemento è monomio. Bisognerà combinare tutti i primi, secondi, ecc. termini degli elementi della prima colonna in tutti i modi possibili con quelli della seconda, della terza, ecc. Se ogni elemento è una

espressione polinomia ad r termini, allora si avranno in tutto r^n determinanti ad elementi monomii.

Così per es.

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

È utile l'osservazione che se alcuni elementi non sono propriamente espressioni polinomie ad r termini, ma ad un numero minore di termini, allora per applicare ancora il medesimo teorema si possono considerare ad r termini, aggiungendo tanti zeri quanti ne occorre. Si hanno allora dei determinanti parziali dove alcuni elementi sono zero.

§ 11. — Sviluppo di un determinante ponendo in vista quantità speciali.

In un determinante generale cogli elementi a_{ij} aggiungiamo x a tutti gli elementi principali.

Vogliamo sviluppare il determinante órdinando lo sviluppo secondo le potenze di x.

L' ordinario metodo che può seguirsi è il seguente. Si immagini il determinante scritto sotto la seguente forma

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+0 & \ldots & a_{1n}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+x & \ldots & a_{2n}+0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+0 & a_{n2}+0 & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

e facciamo lo sviluppo di questo determinante ad elementi binomii in altri ad elementi monomii, giusta la regola nota.

La parte senza x risulta del determinante delle a; la parte in x a primo grado risulta quando combino nel modo noto i secondi termini degli elementi di ciascuna colonna coi primi termini degli elementi di tutte le altre.

Per es. uno dei termini in x a primo grado è il determinante

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

il cui valore è

$$x \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

di cui il secondo fattore è un *minore principale di ordine* $n-1$ (o *diagonale*) del determinante dato. Gli altri termini in x hanno per coefficienti tutti gli altri $n-1$ minori diagonali di ordine $n-1$; dunque possiamo dire che il coefficiente del termine in x a primo grado nello sviluppo del determinante è la somma di tutti i minori principali di ordine $n-1$. Così il coefficiente del termine in x^2 è la somma di tutti i minori diagonali di ordine $n-2$, e così di seguito.

Uno sviluppo per un determinante un poco diverso ma che ha molta analogia con quello qui considerato, si trova in un lavoro del Capelli, *Sopra certi sviluppi di determinanti*, Acc. di Napoli. Rendiconti, marzo 1889; e uno sviluppo ancora più generale si trova in un recente lavoro di Tito Cazzaniga, *Generalizzazione di un teorema del Prof. Capelli.* Istit. Lombardo, Rendiconti, 1896.

§ 12. — Sviluppo dei determinanti orlati.

Si suol chiamare *bordato* o anche *orlato* un determinante quando è formato da un altro determinante A di ordine inferiore coll'aggiunzione di un certo numero di linee e altrettante colonne.

Supponiamo prima che si tratti di *una* linea e di *una* colonna. Si forma allora

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \alpha_n \\ \beta_1 & \dots & \beta_n & \gamma \end{vmatrix} .$$

Si vuol cercare lo sviluppo di un tal determinante ponendo in vista i prodotti delle α per le β.

Evidentemente il termine che contiene γ è

$$A \cdot \gamma$$

dove A è il determinante primitivo; in nessun altro termine compare il fattore γ; esaminiamo qual è il fattore che nello sviluppo completo viene a moltiplicare il prodotto $\alpha_i\, \beta_j\, (i, j, = 1, 2, \ldots n)$. Considerando il minore di 2.° ordine

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & \alpha_i \\ \beta_j & \gamma \end{vmatrix}.$$

Ricordando la regola di sviluppo di determinanti per prodotti di minori, si vede subito che l'altro fattore per il quale, nello sviluppo, resta moltiplicato questo minore è il complemento dell'elemento a_{ij} nel determinante A, che noi indicheremo con A_{ij}. Inoltre il segno con cui il prodotto

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & \alpha_i \\ \beta_j & \gamma \end{vmatrix} A_{ij}$$

comparisce nello sviluppo del determinante sarà quello di

$$(-1)^{i+n+1+j+n+1} = (-1)^{i+j}.$$

È evidente che il prodotto $\alpha_i\, \beta_j$ non comparisce in altri termini che in quelli di questo prodotto, e il suo coefficiente è eguale a

$$-(-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Osservando che nello sviluppo del determinante D ogni termine conterrà sempre per fattore o γ, ovvero un prodotto del tipo $\alpha_i\, \beta_j$, possiamo infine scrivere che lo sviluppo di D è

$$D = \gamma A - \Sigma (-1)^{i+j} \alpha_i\, \beta_j\, A_{ij}$$

estendendo il sommatorio a tutti gli

$$i , j = 1 , 2 \ldots n.$$

Si potrebbe ora fare una ricerca simile quando invece di aggiungere una sola linea e una sola colonna si aggiungano r linee e r colonne.

Indichiamo con Γ il minore formato dalle r linee e colonne aggiunte, il qual minore nel determinante totale D viene ad essere il complemento di A. Uno dei termini dello sviluppo sarà $\Gamma . A$. Negli altri termini compariranno i minori racchiusi dalle linee e colonne aggiunte; noi per brevità tralasciamo di dare questo sviluppo in generale.

Dalle cose dette si vede che un determinante si può sviluppare in modo da riuscire un'espressione *bilineare* negli elementi di una linea e di una colonna.

È da notarsi il seguente teorema di Hesse (*Crelle*. Vol. LXIX, p. 319; si può vedere anche Weierstrass, *Berl. Monatsb.*, 4 marzo 1858, pag. 211), che si riferisce ad un caso in cui una tale espressione bilineare si può scindere nel prodotto di due funzioni lineari.

Se è zero il complemento A_{ij} di un elemento a_{ij} in un determinante dato A, questo è decomponibile in due fattori che sono espressioni lineari con coefficienti frazionarii rispettivamente negli elementi

$$a_{i1} \; a_{i2} \; . \; . \; . \; a_{in}$$

e

$$a_{1j} \; a_{2j} \; . \quad . \; a_{nj}$$

allineati coll' elemento a_{ij}.

In effetti, per semplicità supponiamo che sia zero A_{11}. Nel determinante reciproco del dato consideriamo il minore

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

che sarà eguale a

$$-A_{12}\, A_{21}.$$

Per le proprietà dei determinanti reciproci, quel minore è eguale a $D \, . \, A_{11,22}$, se con $A_{11,22}$ indichiamo il minore ottenuto da A, sopprimendo 1.ª e 2.ª linea, 1.ª e 2.ª colonna; dunque abbiamo la formola

$$D \, . \, A_{11,22} = - A_{12}\, A_{21}.$$

Ora sviluppiamo A_{12}, A_{21} secondo gli elementi della prima colonna, e della prima linea. Si ha colla stessa notazione

$$A_{12} = a_{21}\, A_{11,22} - a_{31}\, A_{11,32} + \ldots \pm a_{n1}\, A_{11,n2}$$
$$A_{21} = a_{12}\, A_{11,22} - a_{13}\, A_{11,23} + \ldots \pm a_{1n}\, A_{11,2n}.$$

Le $A_{11,ij}$ non contengono più gli elementi

$$\begin{matrix} a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{matrix}$$

e quindi si ha D espresso come prodotto di due espressioni *lineari* in tali elementi, con coefficienti che sono rapporti di quantità contenenti solo gli altri elementi.

§ 13. — Numero dei termini contenenti speciali elementi

Una ricerca molto affine a quella sviluppata nei paragrafi precedenti è quella sul numero dei termini dello sviluppo di un determinante contenenti solo *k elementi diagonali* (cioè che stanno sulla diagonale principale).

Eseguiamo il computo nella seguente maniera: consideriamo il primo minore principale di ordine k; uno dei suoi termini sarà il prodotto dei primi k elementi principali; tutti i termini contenenti per fattori questi k elementi principali saranno tanti per quanti sono i termini dello sviluppo del complemento del minore principale scelto, cioè $n-k!$ Ora k elementi principali possono scegliersi in $\binom{n}{k}$ modi diversi, dunque si hanno

$$(n-k)!\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!}$$

termini contenenti k o più elementi principali; però è da notarsi che in questo computo certi termini restano contati più volte. I termini contenenti solo k e *non più* elementi principali sono contati una volta sola, ma quelli contenenti $k+1$ elementi principali restano contati $\binom{k+1}{1}$ volte, e così restano contati $\binom{k+2}{2}$ volte quelli conte-

nenti $k+2$ elementi principali. Indicando con s_k il numero dei termini contenenti *solo* k elementi principali, abbiamo quindi la formola di ricorrenza

$$s_k + \binom{k+1}{1} s_{k+1} + \binom{k+2}{2} s_{k+2} + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{n-k} s_n = \frac{n!}{k!} = S_k .$$

Da questa formola appare, ciò che del resto è evidente da sè che $s_n = 1$, $s_{n-1} = 0$.

Poniamo ora $k = 1, 2, \ldots n$ e poi formiamo la espressione

$$S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - \ldots - (-1)^n S_n =$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots - (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

In questa espressione il coefficiente di s_k è

$$\binom{k}{k-1} - \binom{k}{k-2} + \binom{k}{k-3} - \ldots = 1 - (1-1)^k = 1$$

cioè in questa espressione tutte le s_k vengono ad avere per coefficiente $+1$. Abbiamo quindi

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n =$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

e quindi *il numero dei termini senza elementi principali è $n!$ diminuito di questa quantità cioè*

$$\psi_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Per la letteratura su questo argomento si può vedere:

Cayley, *Crelle.* Vol. XXXVIII, pag. 93.
Baltzer, *Determ.* 5.ª ediz., 1881, pag. 40-41.
Baltzer, *Leipziger Berichten*, 1873, pag. 534.
Weyrauch, *Crelle.* Vol. LXXIV, pag. 273.
Monro, *Messenger of Math.* 1872, pag. 38.
v. Szüts, *Math. Ann.* Vol. XXXIII, pag. 477.

§ 14. — Derivata di un determinante Wronskiani.

Supponiamo che tutti gli elementi di un determinante rappresentino tante variabili indipendenti; allora dalla regola di sviluppo del determinante è senz'altro evidente la seguente proprietà: *la derivata del determinante rispetto ad un qualunque suo elemento è eguale al complemento algebrico di quell'elemento.*

Supponiamo ora che tutti gli elementi del determinante sieno funzioni di una variabile x.

Sia il determinante

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

dove le u sieno funzioni di x.

Per il teorema delle funzioni composte sarà in generale

$$\frac{dU}{dx} = \sum_{rs} \frac{\partial U}{\partial u_{rs}} \frac{d u_{rs}}{dx} = \sum_{rs} U_{rs} \frac{d u_{rs}}{dx}$$

se con U_{rs} indichiamo il complemento algebrico di u_{rs} in U.

Sviluppando il sommatorio rispetto ad r, e indicando con u'_{rs} la derivata $\frac{d u_{rs}}{d x}$ si ha

$$\frac{d U}{d x} = \begin{vmatrix} u'_{11} & u'_{12} & \dots & u'_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u'_{21} & u'_{22} & \dots & u'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

La regola per la formazione della derivata è dunque questa: *si fa la somma di n determinanti ognuno formato dal dato sostituendo agli elementi di una linea le derivate rispettive di essi elementi.*

Sono degni di considerazione i determinanti formati nella seguente maniera: in una linea vi sono come elementi n funzioni di x; nella seconda linea vi sono le derivate di queste funzioni; nella terza linea vi sono le derivate seconde, e così di seguito, nella n^{ma} linea vi sono le derivate $n - 1^{me}$ delle funzioni stesse.

Questi determinanti sogliono chiamarsi WRONSKIANI dal nome del matematico WRONSKI ed essi sono utili nello studio della dipendenza o indipendenza lineare di n funzioni date (v. il mio volume di *Calcolo differenziale,* Milano 1895, p. 220.)

La prima importante proprietà di tali determinanti è questa, che la loro prima derivata rispetto ad x, si forma sostituendo semplicemente agli

elementi della linea in cui compariscono le derivate $n-1^{me}$, le derivate n^{me} delle funzioni stesse. (MALMSTÈN, *Crelle*, Vol. XXXIX, pag. 91.)

Sia

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Formando la derivata rispetto ad x colla regola precedentemente data, si vede che i primi $n-1$ determinanti risultano zero, perchè vengono a contenere sempre due linee identiche, e resta solo l'ultimo determinante della somma, cioè

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Una seconda proprietà dei *wronskiani* è la seguente: *Se le funzioni $u, \dots u_n$ si moltiplicano per una qualunque funzione u, tutto il determinante resta moltiplicato per u^n.* (HESSE, *Crelle*, Vol. LIV, p. 249, CHRISTOFFEL, *Crelle*, Vol. LV, p. 298; FROBENIUS, *Crelle*, Vol. LXXVI, p. 238; PASCH, *Crelle*, Vol. LXXX, p. 177.)

In effetti gli elementi della seconda linea restano modificati così

$$\frac{d}{d\,x}(u\,u_1),\quad \frac{d}{d\,x}(u\,u_2)\;\ldots$$

quelle della terza diventano

$$\frac{d^2}{d\,x^2}(u\,u_1),\quad \frac{d^2}{d\,x^2}(u\,u_2)\;\ldots$$

Sviluppando queste derivate colla nota regola cosiddetta di Leibnitz, e scomponendo il determinante ad elementi polinomii che ne risulta, in tanti altri ad elementi monomii, si trova che alcuni di questi sono zero, perchè vengono ad avere gli elementi di una linea equimultipli di quelli di una linea parallela, e uno solo è diverso da zero ed è eguale al determinante primitivo quando tutti gli elementi si sieno moltiplicati per u.

§ 15. — Proprietà dei minori del determinante prodotto di due dati.

Si è detto che quando i due determinanti da moltiplicare non sono dello stesso ordine, bisogna prima ridurli allo stesso ordine, (il che si fa nel modo più semplice aggiungendo opportunamente delle linee e colonne con elementi 0 e 1 al determinante di ordine minore) e poi si fa il prodotto colla regola ordinaria.

Ora è interessante la seguente osservazione sulla formazione di un prodotto di determinanti, anche quando uno di essi è di ordine minore dell'altro, la quale osservazione può servire per dimostrare in altro modo il teorema di moltiplicazione dei determinanti.

(Vedi König, *Ein Beweis des Multiplicationstheorems für Determinanten*, Math. Ann. Vol. XIV, p. 507.)

Cominciamo dal supporre che si tratti del prodotto di un determinante di 2.° ordine con uno di ordine n.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = A^{(2)} . B.$$

Moltiplichiamo gli elementi della prima linea del determinante B per a_{11} e poi aggiungiamo gli elementi della seconda linea moltiplicati per a_{21}; moltiplicando inoltre gli elementi della seconda linea per A_2 si ha:

$$A^{(2)} a_{11} B =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21}, & a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22}, & \dots a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} \\ A^{(2)} b_{21} & A^{(2)} b_{22} & A^{(2)} b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Agli elementi della seconda linea aggiungiamo quelli della prima moltiplicati per a_{12}. Si può allora sopprimere un fattore a_{11} al primo e secondo membro e resta

$$A^{(2)} . B =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22}, & \ldots a_{11}b_{1n} + a_{21}b_{2n} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}, & \ldots a_{12}b_{1n} + a_{22}b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix} .$$

Indichiamo ora con $A^{(3)}$ il determinante

$$A^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Aggiungiamo agli elementi della prima e seconda linea del prodotto precedente gli elementi della terza moltiplicati rispettivamente per a_{31}, a_{32}. Moltiplicando poi ancora gli elementi della terza linea per $A^{(3)}$ si ha:

$$A^{(2)} A^{(3)} B =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, \ldots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, \ldots \\ A^{(3)} b_{31} & A^{(3)} b_{32} \quad , \ldots \\ b_{41} & b_{42} \quad , \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} .$$

E se alla terza linea aggiungiamo gli elementi della prima e seconda moltiplicati rispettivamente per i complementi algebrici degli elementi a_{31}, a_{32} nel determinante $A^{(3)}$, otteniamo infine dopo una facile riduzione

$$A^{(3)} B =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, \dots \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}, & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32}, \dots \\ b_{41} & b_{42} \\ \dots & \dots \end{vmatrix} .$$

Potremmo seguitare sempre collo stesso metodo, e trovare i prodotti B per $A^{(4)}$, $A^{(5)}$, etc. La legge di formazione di questi prodotti è evidente; si potrebbe dimostrare che se essa sussiste per l'indice i sussisterà per l'indice $i + 1$. Se il primo determinante diventa di ordine n, allora si ricade nella solita regola per il prodotto di due determinanti dello stesso ordine.

Questi prodotti di $A^{(2)}$, $A^{(3)} \dots$ per B possono ottenersi subito colla regola ordinaria, eseguendo prima quell'operazione da noi ricordata al principio di questo paragrafo; l'importante però delle considerazioni qui sviluppate sta in questo che per questa via si può giungere senz'altro alla solita regola del prodotto dimostrata ordinariamente in maniera diversa. È a ciò che il König citato fa servire questa osservazione.

Altri lavori in cui si danno dimostrazioni del prodotto di due determinanti sono:

Janni, *Sul prodotto di due matrici*. Giorn. di Batt. Vol. XI, p. 357 (1873).

Le Paige, *Sur la règle de multiplication des déterminants*. Bulletin de la Société math. de France. Vol. IX, p. 67.

De Presle, *Multiplication de deux déterminants de même degré*. Id. Vol. XIV, p. 157.

Si sa che il prodotto di due determinanti

$$A = |a|, \quad B = |b|$$

dello stesso ordine si può eseguire in quattro modi diversi; cioè o si combinano le linee dell'uno colle linee del secondo, o le linee del primo colle colonne del secondo, o le colonne del primo colle linee del secondo, o finalmente le colonne del primo colle colonne del secondo.

Facciamo il prodotto una volta combinando le linee del primo colle linee del secondo, e una volta combinando le colonne del primo colle colonne del secondo. Supponiamo che nei due casi abbiamo rispettivamente i risultati:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

dove

$$c_{rs} = a_{r1}\, b_{s1} + a_{r2}\, b_{s2} + \ldots$$

$$\gamma_{rs} = a_{1r}\, b_{1s} + a_{2r}\, b_{2s} + \ldots$$

Questi due determinanti sono naturalmente fra loro eguali, sebbene i loro elementi sieno rispettivamente differenti.

È interessante ora l'osservazione che fra certi determinanti minori di C e fra i corrispondenti di Γ esistono delle semplicissime relazioni lineari omogenee.

Vogliamo passare a fare un cenno di tali relazioni fatte notare da WELTZIEN *(Ueber das Product zweier Determinanten.* Math. Ann. Vol. XLII, p. 598; 1893.)

Chiamiamo *minori diagonali* in un determinante quei minòri in cui tutti gli elementi della diagonale *principale* sono elementi della diagonale principale del determinante dato.

Il teorema elegante che allora si può dimostrare è il seguente:

La somma di tutti i minori diagonali di ordine k in C è eguale alla somma dei minori diagonali di ordine k in Γ.

Se $k = n$, questo teorema ha come caso particolare il fatto che $C = \Gamma$.

Se $k = 1$ si ha ancora come caso particolare che la somma di tutti gli elementi diagonali di C è eguale a quella di elementi diagonali di Γ.

Quest' ultimo teorema può dimostrarsi subito osservando che la somma degli elementi diagonali

di C può mettersi sotto la forma

$$\sum_{r,i} a_{ir}\, b_{ri}$$

dove gli indici r, i, debbono avere tutti i possibili valori $1, 2, \ldots n$; e che sotto la medesima forma compare anche la somma degli elementi diagonali di Γ.

Per semplicità supponiamo $n = 4$. Allora dal teorema sopra riferito si deduce che sussistono le seguenti eguaglianze

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{14} \\ c_{41} & c_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{22} & c_{24} \\ c_{42} & c_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{13} \\ \gamma_{31} & \gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{14} \\ \gamma_{41} & \gamma_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{24} \\ \gamma_{42} & \gamma_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{24} \\ c_{41} & c_{42} & c_{44} \end{vmatrix} + \text{ecc.} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{24} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{44} \end{vmatrix} + \text{ecc.}$$

Per dimostrare il teorema dobbiamo servirci di una proprietà già dimostrata a proposito del prodotto di due determinanti; noi sappiamo cioè, che un minore del prodotto di due determinanti è eguale al prodotto di due matrici contenute nei due determinanti dati, e, si può aggiungere, se si tratti di un minore diagonale, allora le matrici da moltiplicare sono precisamente due matrici omologhe scelte nei due determinanti. (v. § 7.)

Con questa osservazione ognuno dei minori diagonali di k^{mo} ordine di C non è altro che la somma dei prodotti di minori di k^{mo} ordine di A per i loro omologhi in B; e la somma di tutti i minori diagonali di k^{mo} ordine di C, non è altro che la somma dei prodotti di tutti i minori di k^{mo} ordine contenuti in A pei loro omologhi in B. Potendosi allora dire lo stesso del determinante Γ, risulta che le due somme di minori diagonali di ordine k, in C e in Γ sono fra loro eguali.

Dalla dimostrazione risulta ancora che *la somma di tutti i minori diagonali di ordine k contenuti nel determinante prodotto $C = A\,B$, è eguale alla somma dei prodotti di tutti i minori di ordine k contenuti in A per i loro omologhi in B.*

Questo teorema, che può facilmente estendersi anche al caso dei *minori non diagonali*, si trova forse per la prima volta in una Memoria di PICQUET *Analyse combinatoire des déterminants* (Journ. de l'École Polyt. T. XXVIII, p. 203, 1878). Per la espressione di un minore del prodotto mediante i minori dello stesso ordine dei fattori componenti si può vedere HESSE (*Crelle*, Vol. XLIX, p. 243.

§ 16. — Determinanti simmetrici, gobbi, emisimmetrici.

Si abbia un determinante formato cogli elementi a.

Se

$$a_{rs} = a_{sr}$$

il determinante si dice *simmetrico*; sono allora eguali gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla *diagonale principale.*

Se

$$a_{rs} = - a_{sr}$$

allora il determinante si dice *gobbo*, e se inoltre

$$a_{rr} = 0$$

allora si ha il determinante *gobbo simmetrico*, ovvero *emisimmetrico.* Gli elementi a_{rs} a_{sr} possono chiamarsi coniugati.

Ogni minore diagonale di un determinante simmetrico è anche simmetrico; in effetti un minore diagonale si ricava dal primitivo togliendo linee e colonne che si incrociano sulla diagonale principale, e che se contengono quindi l'elemento a_{rs} conterranno a_{sr}; restan così tolti tutti elementi a due a due *coniugati;* i restanti saranno ancora a due a due coniugati e disposti simmetricamente rispetto alla diagonale.

Dalla definizione di determinante *simmetrico*, risulta subito che se in esso si mutano le linee colle colonne, il determinante resta lo stesso anche nel suo aspetto simbolico. Osservando allora che il minore complementare di a_{rs} in qualunque determinante non è altro che quello relativo all' elemento a_{sr} quando però nel determinante dato si scambiano prima le linee colle colonne, si ricava che:

In un determinante simmetrico i minori complementari di due elementi coniugati sono eguali.

Quindi:

Il reciproco di un determinante simmetrico è anche un determinante simmetrico.

Analogamente possiamo dire:

I minori diagonali di un determinante gobbo sono anche determinanti gobbi.

Se in un determinante gobbo simmetrico si scambiano la linee colle colonne, poichè in generale l'elemento a_{rs} resta scambiato con a_{sr}, e poichè $a_{rs} = -a_{sr}$ e $a_{rr} = o$, si ha che ogni elemento resta moltiplicato per -1. Ora se in un determinante di ordine n tutti gli elementi si moltiplicano per (-1), esso resta moltiplicato per $(-1)^n$.

Onde si ricava che se n è dispari, il determinante resterebbe mutato di segno collo scambiare le linee colle colonne, e quindi esso non può essere che zero. Cioè:

Un determinante emisimmetrico di ordine dispari è zero.

Analogamente consideriamo il minore complementare di un elemento a_{rs}. Se cambiamo i segni a tutti gli elementi, abbiamo il minore comple-

mentare dell'elemento coniugato a_{sr}, perchè mutar segno a tutti gli elementi corrisponde a scambiare le linee colle colonne. Onde possiamo dire che il minore complementare di a_{sr} è eguale a $(-1)^{n-1}$ moltiplicato per il minore complementare di a_{rs}; cioè:

In un determinante emisimmetrico di ordine n i minori complementari di due elementi coniugati sono eguali in valore assoluto; sono poi dello stesso segno o di segni opposti secondochè n è dispari o pari.

Quindi anche:

Il reciproco di un determinante emisimmetrico è simmetrico ovvero emisimmetrico secondochè l'ordine o dispari o pari.

Sapendo che in un determinante zero i minori complementari degli elementi di una linea sono proporzionali a quelli degli elementi corrispondenti di una linea parallela, e applicando l'ultimo teorema possiamo dire:

In un determinante emisimmetrico di ordine dispari indicando con A_{rs} i minori complementari dei diversi termini, si ha la relazione

$$A_{rr}\,A_{ss} = A^2_{rs}.$$

Passiamo ora a far vedere che *ogni determinante emisimmetrico di ordine pari è il quadrato perfetto di un'espressione razionale intera nei suoi elementi.*

Per un determinante emisimmetrico di 2.° ordine, cioè:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$$

la cosa è evidente.

Dimostreremo che se si verifica per l'ordine $n-2$ si verificherà anche per l'ordine n.

Indichiamo al solito con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante dato di ordine pari n.

Allora A_{11} è un determinante emisimmetrico di ordine dispari e quindi zero.

In esso chiamiamo α_{rs} il complemento algebrico dell' elemento a_{rs}; allora

$$a_{22}\,\alpha_{22} + a_{23}\,\alpha_{23} + \ldots + a_{2n}\,\alpha_{2n} = A_{11} = 0$$
$$a_{32}\,\alpha_{22} + a_{33}\,\alpha_{23} + \ldots + a_{3n}\,\alpha_{2n} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Moltiplichiamo per α_{22} gli elementi della seconda colonna nel determinante dato, e aggiungiamo ad essi rispettivamente quelli della 3.ª moltiplicati per α_{23}, quelli della quarta moltiplicati per α_{24}, etc.

Allora per le relazioni precedenti, gli elementi della seconda colonna risultano tutti nulli, meno il primo; e quindi si ha (se R è il derminante dato)

$$\alpha_{22}\,R = -(a_{12}\,\alpha_{22} + \ldots a_{1n}\,\alpha_{1n}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

E sviluppando il determinante per gli elementi della prima colonna si ha

$$\alpha_{22} R = (a_{12} \alpha_{22} + \ldots + a_{1n} \alpha_{2n})^2$$

essendo per ipotesi $a_{21} = - a_{12}, \ldots a_{n1} = - a_{1n}$, ed avendosi inoltre le relazioni

$$\alpha_{23} = \alpha_{32}, \ldots \alpha_{2n} = \alpha_{n2}$$

fra i minori del determinante emisimmetrico di ordine dispari A_{11}.

Ora per il teorema sopra dimostrato

$$\alpha_{23} = \sqrt{\alpha_{22}} \sqrt{\alpha_{33}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{2n} = \sqrt{\alpha_{22}} \sqrt{\alpha_{nn}}$$

onde

$$R = (a_{12} \sqrt{\alpha_{22}} + a_{13} \sqrt{\alpha_{33}} + \ldots + a_{1n} \sqrt{\alpha_{nn}})^2.$$

Per l'ipotesi che il teorema da dimostrarsi si verifica sino ai determinanti di ordine $n - 2$, e per l'osservazione che $\alpha_{22}, \ldots \alpha_{nn}$ sono appunto determinati emisimmetrici di ordine $n - 2$, si ricava che i radicali che compariscono in questa formola sono delle espressioni razionali, e quindi R è espresso come il *quadrato* di un'espressione *razionale*. Nella formola superiore i radicali bisogna prenderli con segni tali che il prodotto di due di essi per es. $\sqrt{\alpha_{ii}} \sqrt{\alpha_{jj}}$ dia esattamente $+ \alpha_{ij}$. Quindi

determinato il segno di uno di essi resta determinato il segno di qualunque altro.

Consideriamo un determinante emisimmetrico di ordine pari, e che sia simmetrico rispetto alla seconda diagonale.

Ciò significa che oltrechè supporre

$$a_{ii} = 0$$
$$a_{rs} = -a_{sr}$$

si suppone ancora

$$a_{ij} = a_{n-j+1,\, n-i+1}.$$

Per fissare le idee consideriamo questo determinante di 4.° ordine

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & b \\ -b & -d & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix}.$$

Alla prima colonna aggiungiamo l'ultima colonna, e poi alla prima linea aggiungiamo l'ultima. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-b & b-a & c \\ b-a & 0 & d & b \\ a-b & -d & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix}.$$

Ora alla seconda colonna aggiungiamo la terza

e indi alla seconda aggiungiamo la terza linea. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a & c \\ 0 & 0 & d & b+a \\ a-b, & -d & 0 & a \\ -c, & -b-a, & -a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c \\ d & b+a \end{vmatrix}^2 .$$

Lo stesso procedimento potrebbe farsi per un ordine qualunque, e quindi possiamo dire:

Se un determinante emisimmetrico di ordine pari, è anche simmetrico rispetto alla seconda diagonale, esso potrà esprimersi come il quadrato di un determinante di ordine metà.

(v. Günther, *Determ.*, 2.ª ediz., p. 91. Erlangen, 1877.)

§ 17. — Pfaffiani.

L'espressione il cui quadrato è un determinante emisimmetrico di ordine pari, ha ricevuto il nome di *Pfaffiano* perchè essa interviene nella soluzione col metodo di Pfaff, di un'equazione a derivate parziali di 1.° ordine.

Lo Scheibner dette invece a tale espressione anche il nome di *semideterminante*.

Per la letteratura sull'argomento si può vedere:

Jacobi, *Crelle*. Vol. II, p. 354; *Crelle*. Volume XXIX, p. 236.

Cayley, *Crelle.* Vol. XXXII, p. 119; *id.* Volume XXXVIII, p. 95; *id.* Vol. L, p. 299.
Scheibner, *Leip. Berich.* (1859). Vol. XI, pagina 151.
Veltmann, *Schlömilch Zeits.* 1871). Vol. XVI, p. 516.
Schering, *Abh. der Gött. Ges.* (1877). Vol. XXII.
Trudi, *Determ.*, p. 92.
Baltzer, *Determ.*, 5.ª ediz., p. 45-46-47.
Günther, *Determ.*, 2.ª ediz., p. 90-91.

Secondo Jacobi indichiamo col simbolo

$$(1, 2, \ldots\ n)$$

il Pfaffiano di ordine n. Propriamente indicheremo con questo simbolo, quella fra le due radici del determinante emisimmetrico, la quale contiene col segno + il termine $a_{12}\ a_{34}, \ldots\ a_{n-1,n}$.

È facile allora trovare una formola di ricorrenza che dà lo sviluppo del Pfaffiano di ordine n, mediante quelli di ordine inferiore.

Per far ciò dobbiamo ricorrere alla formola ultimamente trovata sullo sviluppo di un determinante emisimmetrico R. Con quella formola il pfaffiano resta espresso con

$$a_{12} \sqrt{\alpha_{22}} + a_{13} \sqrt{\alpha_{33}} + \ldots$$

dove $\alpha_{22}\ \alpha_{33}$ sono i *complementi algebrici* degli elementi principali nel determinante ricavato dal dato R sopprimendo la prima linea e la prima colonna (complemento di a_{11}), inoltre il primo radicale $\sqrt{\alpha_{22}}$ deve assumersi con segno tale che il

termine $a_{31} \dots a_{n-1,n}$ che in esso comparisce, venga col segno positivo, e infine gli altri radicali devono assumersi con tali segni che

$$\sqrt{\alpha_{ii}}\,\sqrt{\alpha_{22}} = +\,\alpha_{2i}$$

essendo α_{2i} il complemento *algebrico* di a_{2i} nel complemento R_{11} di a_{11} in R.

α_{22} è il determinante emisimmetrico di ordine $n-2$ ricavato dal dato sopprimendo le due prime linee e colonne, e quindi $\sqrt{\alpha_{22}}$ non è altro che il Pfaffiano degli elementi $3, 4, \dots n$, che indicheremo con $(3, 4, \dots n)$ prendendo il radicale col segno $+$.

Si può verificare che prendendo i radicali tutti col segno positivo, il prodotto $\sqrt{\alpha_{ii}}\,\sqrt{\alpha_{jj}}$ dà esattamente in valore e *segno* il complemento di a_{ij} in R_{11}. Per avere dunque nel prodotto, non il *complemento* ma il *complemento algebrico*, bisognerà moltiplicare per $(-1)^{i+j}$. Dunque possiamo conchiudere che in generale (avendo assunto col segno $+$ il radicale $\sqrt{\alpha_{22}}$) bisogna assumere col segno di $(-1)^i$ il radicale $\sqrt{\alpha_{ii}}$.

Ognuno dei radicali $\sqrt{\alpha_{ii}}$ è un pfaffiano di ordine $n-2$. Colla notazione di Jacobi si ha dunque

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (-1)^i\,(2, 3, \dots i-1, i+1, \dots n)$$

ovvero, trasportando in ultimo posto gli elementi $2, 3, \dots i-1$, si ha esattamente

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (i+1, \dots n, 2, 3, \dots i-1).$$

Si ha allora subito la seguente formola di ri-

correnza

$$\begin{aligned}(1,2,\ldots n) = &(1,2)\ (3,4,\ \ldots\ n) + \\ &+ (1,3)\ (4,5,\ \ldots\ n,2) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (1,n)\ (2,3,\ \ldots\ n-1).\end{aligned}$$

Le espressioni $(1\,,2)\,,(1\,,3)\ldots$ non sono altro che gli elementi $a_{12}\,,a_{13}\,,\ldots,$ cioè i pfaffiani di 2.° ordine.

Riapplicando successivamente questa formola ai pfaffiani di ordine $n-2$, resta $(1\,,2\,,\ldots n)$ espresso mediante i pfaffiani di ordine $n-4$, e così di seguito; si ricava di qui un mezzo per sviluppare un pfaffiano.

Così il pfaffiano di 4.° ordine $(1\,,2\,,3\,,4)$ è eguale a

$$\begin{aligned}(1,2,3,4) &= (12)\,(34) + (13)\,(42) + (14)\,(23) = \\ &= a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23}.\end{aligned}$$

Se è c_{n-2} il numero dei termini di un pfaffiano di ordine $n-2$, il numero dei termini di uno di ordine n sarà

$$c_n = (n-1)\,c_{n-2}$$

quindi in generale

$$c_n = (n-1)\,(n-3)\,(n-5)\ldots 3\,.\,1.$$

Resta così calcolato il numero dei termini di un pfaffiano.

È evidente che un pfaffiano muta di segno se si scambiano fra loro due indici. Così p. es.

$$(1\,2\,3\ldots n) = -(2\,1\,3\ldots n).$$

Giacchè mentre nel primo membro compare il termine

$$+ a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1\, n}$$

nel secondo comparirà invece il termine

$$- a_{21}\, a_{34} \ldots a_{n-1\, n}$$

il quale, essendo $a_{21} = - a_{12}$, è lo stesso di prima.

È notevole la seguente proprietà:

Ogni minore di ordine $n - 1$ del determinante emisimmetrico dato è eguale al prodotto del pfaffiano $(1, 2, \ldots n)$ per un altro pfaffiano di ordine $n - 2$ ottenuto da questo sopprimendo due degli indici.

In effetti consideriamo p. es. il complemento di a_{12} che è

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

I complementi algebrici degli elementi della prima colonna sono esattamente le quantità indicate avanti con α_{ij}.

Sviluppando questo determinante si ha dunque

$$a_{21}\, \alpha_{22} + a_{31}\, \alpha_{32} + \ldots + a_{n1}\, \alpha_{n2}$$

cioè, per le proprietà già trovate,

$$\sqrt{\alpha_{22}}\, (a_{21} \sqrt{\alpha_{22}} + a_{31} \sqrt{\alpha_{33}} + \ldots + a_{n1} \sqrt{\alpha_{nn}})$$

ma

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (i + 1 \ . \ . \ . \ n, \ 2, \ 3 \ . \ . \ . \ i - 1)$$

dunque si ha

$$(3, 4, \ . \ . \ . \ n) \Big[(2, 1)(3, 4, \ . \ . \ . \ n) + \\ + (3, 1)(4, 5, \ . \ . \ . \ n, 2) + \\ + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ + (n, 1)(2, 3, \ . \ . \ . \ n - 1)\Big]$$

cioè

$$-(3, 4, \ . \ . \ . \ n)(1, 2, 3, \ . \ . \ . \ n).$$

Con ciò il teorema resta dimostrato. Risulta propriamente *in valore e in segno* la formola (indicando con A_{ij} il complemento di a_{ij} in R)

$$A_{ij} =$$
$$= -(1, 2, \dots n)(1, 2, \dots i - 1, i + 1, \dots j - 1, j + 1, \dots n).$$

Il segno di questa espressione si riconosce così: in A_{ij} il coefficiente di a_{ji} è il quadrato del pfaffiano ottenuto da $(1, 2 \dots n)$ sopprimendo gli indici i, j col segno di $(-1)^{i+j-1}$. Se vogliamo ricercare nel secondo membro il coefficiente di a_{ji} cioè di $-a_{ij}$ sviluppiamo $(1, 2, \dots n)$ colla nota formola di ricorrenza dopo aver avuto cura di trasportare a primo posto gli indici i, j. Ora

$$(1, 2, \dots n) =$$
$$= (-1)^{i+j-3}(i, j, 1, 2, \dots i - 1, i + 1, \dots j - 1, j + 1, \dots n).$$

Quindi al secondo membro il coefficiente di $-a_{ij}$ cioè di $-(i,j)$ è esattamente

$$(-1)^{i+j-3}\,|1, 2, \dots i-1, i+1, \dots j-1, j+1, \dots n|^2$$

cioè lo stesso che nel primo membro.

§ 18. — Teoremi sui determinanti simmetrici e gobbi.

Passiamo a dimostrare sui determinanti simmetrici una proprietà rimarchevole per le sue applicazioni alla Geometria e alla Meccanica, proprietà conosciuta sin dai tempi di Cauchy, ma dimostrata per la prima volta in modo facile da Sylvester. (*Philos. Magaz.* 1852).

Consideriamo il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}.$$

dove si suppone che $a_{rs}=a_{sr}$. Indichiamo questo determinante con $f(-x)$ e formiamo il prodotto $f(x)f(-x)$. Si ha, tenendo presente che il determinante delle a è simmetrico:

$$f(x)f(-x) = \begin{vmatrix} c_{11}-x^2 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-x^2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}-x^2 \end{vmatrix}$$

ponendo:

$$c_{rr} = \sum_j a^2_{rj}$$

$$c_{rs} = \sum_j a_{rj}\, a_{sj}.$$

Sviluppiamo questo determinante e ordiniamolo secondo le potenze di $(-x^2)$. Il termine senza x^2 sarà evidentemente le stesso determinante quando vi poniamo $x^2 = 0$, cioè sarà il quadrato del determinante dato quando in esso si pone $x = 0$. Chiamiamo C il determinante delle c quando vi si pone $x^2 = 0$, e chiamiamo A quelle delle a quando vi si pone $x = 0$. Si ha $C = A^2$. Per vedere quali saranno gli altri coefficienti dello sviluppo immaginiamo di aggiungere ad ogni elemento *non* principale un zero, in modo da porre tutto il determinante sotto la forma di uno ad elementi binomii; immaginiamo poi fatta la scomposizione in tanti altri determinanti ad elementi monomii. Allora il coefficiente di $(-x^2)$ sarà la somma di tutti i minori principali di ordine $n - 1$ del determinante C; e così il coefficiente di $(-x^2)^2$ sarà la somma di tutti i minori principali di ordine $n - 2$ di C, e così di seguito. (V. § 11.) Ora noi sappiamo in generale (v. § 15) che un minore *principale* di ordine ν di C prodotto di due altri determinanti è la somma dei prodotti di tutti i minori principali di ordine ν contenuti in uno dei fattori per gli analoghi nell'altro; poichè qui in particolare C è il quadrato del determinante delle a, si ha che un suo minore principale di ordine ν è la somma dei quadrati di tutti i minori di ordine ν di A.

Il risultato è dunque che tutti i coefficienti dello sviluppo secondo le potenze di $(-x^2)$ del determinante $f(x) f(-x)$ sono somme di quadrati di espressioni formate colle a. Supposto le a numeri reali, si ha perciò che tutti siffatti coefficienti sono numeri essenzialmente positivi.

L'equazione

$$f(x) f(-x) = 0$$

non può allora essere soddisfatta da un x immaginaria pura cioè della forma $q\sqrt{-1}$, perchè essendo $-x^2 = q^2$ si avrebbe, sostituendo nell'equazione, una somma di numeri essenzialmente positivi, e che quindi non può essere zero; e analogamente quella equazione non può neanche essere soddisfatta da un x della forma complessa

$$p + q\sqrt{-1}.$$

perchè allora ponendo

$$\begin{aligned} a_{11} - p &= a'_{11} \\ a_{22} - p &= a'_{22} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

il determinante

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - x & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nn} - x \end{vmatrix}$$

dovrebbe diventare zero per $x = q\sqrt{-1}$, il che, abbiamo visto che è impossibile.

Dunque x non può che essere reale, cioè:

Se si considera il determinante simmetrico della forma precedente, sviluppato secondo le potenze di x, l'equazione che ha per primo membro tal polinomio in x, non ha che solo radici reali.

A questo argomento si correlano i due lavori di SYLVESTER, *Preuve istantanée d'après la methode de Fourier de la réalité des racines de l'equation séculaire.* (*Crelle*, 88, p. 4.) SYLVESTER, *Sur un déterminant symmétrique qui comprend comme cas particulier la première partie de l'équation séculaire.* (*Crelle,* 88, p. 6.)

Vogliamo ora far notare un teorema sui determinanti gobbi di cui gli elementi principali sono eguali ad 1. Si può far vedere che:

Ogni determinante gobbo di cui gli elementi principali sono eguali ad 1 *è una somma di quadrati.*

Se al posto degli elementi principali poniamo zero, abbiamo un determinante emisimmetrico, che, come sappiamo, è sempre un quadrato perfetto. Se invece poniamo x abbiamo un altro determinante gobbo che si può considerare come quello ottenuto aggiungendo x agli elementi principali del determinante emisimmetrico. Per $x = 1$ si ha poi il dato determinante. Si può allora fare uno sviluppo simile a quello fatto precedentemente e ordinare il polinomio in x che ne risulta secondo le potenze ascendenti di x.

Come precedentemente si vede che i cofficienti delle potenze di x non sono che somme di *minori principali* del determinante emisimmetrico.

Poichè tali minori *principali* sono a loro volta determinanti emisimmetrici, si ricava che i coefficienti delle diverse potenze di x nello sviluppo sono somme di quadrati. Per $x = 1$ tutto lo sviluppo si riduce ad una somma di quadrati.

§ 19. — Determinanti di Hankel e affini.

Passiamo a studiare alcune classi speciali di determinanti simmetrici.

Il determinante di Hankel (*Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten.* Göttingen, 1861) è formato, mediante $2n - 1$ elementi dati, nella seguente maniera (vedi anche Baltzer, *Det.*, V ediz., p. 26).

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Un tal determinante fu da Hankel chiamato *ortosimmetrico* e dal Sylvester *persimmetrico.*

Questo determinante ha la proprietà di potersi esprimere con un altro in cui gli elementi sono le differenze fra le quantità consecutive $a_0 \dots a_{2n-2}$.

Poniamo

$$\Delta_1^{(1)} = a_1 - a_0$$

$$\Delta_2^{(1)} = a_2 - a_1, \qquad \Delta_2^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)}$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta^{(1)}_n = a_n - a_{n-1}, \; \Delta^{(2)}_n = \Delta^{(1)}_n - \Delta^{(1)}_{n-1} \dots \Delta^{(n)}_n = \Delta^{(n-1)}_n - \Delta^{(n-1)}_{n-}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e sottragghiamo dagli elementi dell'ultima colonna quelli della penultima, da quelli della penultima quelli dell'antipenultima, e così di seguito; si ha allora

$$\begin{vmatrix} a_0 & \Delta^{(1)}_1 & \Delta^{(1)}_2 & \dots & \Delta^{(1)}_{n-1} \\ a_1 & \Delta^{(1)}_2 & \Delta^{(1)}_3 & \dots & \Delta^{(1)}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & \Delta^{(1)}_n & \Delta^{(1)}_{n+1} & \dots & \Delta^{(1)}_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Facciamo ora la stessa operazione su questo determinante a cominciare dalla 3.ª colonna; poi su quello che si ottiene facciamo la stessa operazione a cominciare dalla 4.ª colonna, e così di seguito. Si ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & \Delta^{(1)}_1 & \Delta^{(2)}_2 & \dots & \Delta^{(n-1)}_{n-1} \\ a_1 & \Delta^{(1)}_2 & \Delta^{(2)}_3 & \dots & \Delta_n^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & \Delta^{(1)}_n & \Delta^{(2)}_{n+1} & \dots & \Delta^{(n-1)}_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

E se ora infine dalla seconda linea sottragghiamo la prima, dalla 3.ª la 2.ª, e così di seguito si ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & \Delta^{(1)}_1 & \Delta^{(2)}_2 & \dots & \Delta^{(n-1)}_{n-1} \\ \Delta^{(1)}_1 & \Delta^{(2)}_2 & \Delta^{(3)}_3 & \dots & \Delta_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{(n-1)}_{n-1} & \Delta^{(n)}_n & \Delta^{(n+1)}_{n+1} & \dots & \Delta^{(2n-2)}_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

formato con tutte le differenze Δ aventi eguali gli indici superiori e inferiori.

È notevole il fatto che rispetto alle quantità $\Delta_k^{(k)}$ questo determinante è formato nella medesima maniera di quella colla quale è formato il determinante dato rispetto alle quantità a. Per simmetria di scrittura la quantità a_0 potrebbe designarsi con $\Delta_0^{(0)}$.

Supposto in particolare che gli elementi

$$a_0 \ . \ . \ . \ a_{2n-2}$$

formino una progressione aritmetica di ordine $n-1$, cioè sieno eguali le loro differenze di ordine $n-1$ *, e quindi sieno nulle le differenze di ordine superiore ad $n-1$, si ha che saranno zero tutti gli elementi situati al disotto della seconda diagonale, cioè tutte le $\Delta^{(k)}{}_k$ dove $k > n-1$; e quindi il determinante precedente si riduce al prodotto degli elementi della seconda diagonale col segno di $(-1)^{\frac{n.n-1}{2}}$; cioè si ha

$$(-1)^{\frac{n.n-1}{2}} \left[\Delta^{(n-1)}{}_{n-1}\right]^n .$$

Se poi gli elementi dati formano una progressione aritmetica di ordine minore di $n-1$, allora il determinante è zero.

Ed è ancora zero il determinante di Hankel

* Date delle quantità in un numero qualunque e in un ordine stabilito, le differenze di due quantità consecutive, (quelle che abbiamo indicato con $\Delta^{(1)}{}_k$) si chiamano le differenze di 1.º ordine; le differenze di due $\Delta^{(1)}$ consecutive, si chiamano differenze di 2.º ordine, e così di seguito.

se gli elementi formano una progressione geometrica perchè allora gli elementi della seconda linea sono equimultipli di quelli della prima linea. (Günther, *Determ.*, pag. 80. Erlangen, 1877.)

Un determinante la cui formazione ha qualche affinità con quelli di Hankel è il seguente

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} = D_n .$$

Per questo D_n si può trovare una notevole formola di ricorrenza che ne fa dipendere il calcolo da quelli analoghi di ordine $n-1$ e $n-2$. Vedi Jacobi, *Opere*, III, p. 315; Frobenius, *Berl. Berich.* 1894, pag. 414; Netto, *Zur Theorie der Resultanten*, *Crelle*, Vol. CXVI, p. 44 (1896).

Il minore complemento dell'elemento x^n è un determinante di Hankel che chiameremo H_n.

$$H_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} & \end{vmatrix}$$

e chiameremo poi H'_n il complemento dell'elemento x^{n-1}, cioè il determinante che si ottiene da

questo sostituendo all'ultima linea gli elementi

$$a_n \; a_{n+1} \; . \; . \; . \; a_{2n-1}$$

$$H'_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

La formola di ricorrenza di cui parliamo è

$$H^2_{n-1} D_n + \\ + (H_{n-1} H'_n - H_n H'_{n-1} - H_{n-1} H_n x) D_{n-1} + \\ + H^2_n D_{n-2} = 0.$$

§ 20. — Determinanti circolanti.

Passiamo ora ai cosiddetti determinanti *circolanti*, che sono determinanti simmetrici formati con sole n quantità; nella prima linea disponiamo queste n quantità; nella seconda poniamo le stesse quantità dopo che le abbiamo permutate fra loro circolarmente; nella terza le stesse della seconda linea, ma permutate ancora una volta circolarmente fra loro, e così di seguito.

Un determinante *circolante* è cioè della forma

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Evidentemente esso è un determinante simmetrico. Vediamo come si può determinare il valore di qualunque *circolante.*

Sieno $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ le n radici (compresa l'unità) dell'equazione binomia

$$x^n - 1 = 0$$

Allora moltiplichiamo il circolante per

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

e poniamo in generale

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}.$$

Osservando che

$$\alpha^n = 1$$

e quindi

$$a_2 + a_3\alpha + a_4 \alpha^2 + \ldots + a_n \alpha^{n-2} + a_1\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}\varphi(\alpha)$$
$$a_3 + a_4\alpha + a_5 \alpha^2 + \ldots + a_1 \alpha^{n-2} + a_2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-2}\varphi(\alpha)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si ha, eseguendo il prodotto per orizzontali,

$$A \,.\, D = \begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \varphi(\alpha_2) & \ldots \varphi(\alpha_n) \\ \alpha_1^{n-1}\varphi(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1}\varphi(\alpha_2) & \ldots \alpha_n^{n-1}\varphi(\alpha_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1\varphi(\alpha_1) & \alpha_2\varphi(\alpha_2) & \ldots \alpha_n\varphi(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$= \varphi(\alpha_1)\dots\varphi(\alpha_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

donde

$$A = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\ .\ .\ .\ \varphi(\alpha_n),$$

formola rimarchevole, che fa dipendere il calcolo del determinante circolante dalla conoscenza delle radici n^{me} dell'unità.

Questa formola può interpretarsi dicendo: *un circolante di ordine n si scinde in n fattori razionali nei suoi elementi.*

Una lista di lavori sui determinanti circolanti è la seguente:

ZEHFUSS, *Anwendungen einer besonderen Determinante.* Zeits. f. Math. etc. Vol. VII, p. 439 (1862).

SOUILLART, *Nouv. Ann. de math.* Tomo XIX, p. 320 (1860).

CREMONA, *Sopra un teorema di Abel.* Annali di Tortolini. T. VII.

STERN, *Einige Bemerkungen über eine Determinante. Crelle.* Vol. LXXIII, p. 374 (1871).

GLAISHER, *On a special form of determinant* ecc. Quarterly Journal of Math. Vol. XVI, p. 31.

SCOTT, *Note on a determinant Theorem of Mr. Glaisher.* Vol. XVII, p. 130.

Muir, *On new and recently discovered properties of certain symmetric determinants.* Vol. XVIII, p. 166.

Torelli, *Sui determinanti circolanti* (Rendic. Acc. Napoli 1882).

Minozzi, *Sopra un determinante.* Giornale di Batt. Vol. XVI, p. 148 (1878).

Tali determinanti capitano in questioni sulla teoria dei numeri e in quistioni geometriche.

Schütz, *Unters. über Funct. congruenzen.* Diss. Göttingen, 1867.

Dickmann, *Lehre von der Determ.*, p. 62.

Kummer, *Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés des racines de l'unité et de nombres entiers.* Journ. de Liouville. I.ere série. T. XVI, p. 381.

Prima di enunciare alcuni dei teoremi sui circolanti introduciamo una denominazione.

Insieme al circolante, consideriamo l'altro determinante

$$A' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ -a_3 & -a_4 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

che si ricava dal circolante cambiando segno a tutti gli elementi che stanno da una stessa parte della diagonale principale. Questo nuovo determi-

nante lo chiamiamo *gobbo circolante*, perchè esso evidentemente è un determinante *gobbo* speciale.

I teoremi sono i seguenti:

1. *Un circolante di ordine rm è esprimibile per mezzo di un circolante di ordine m, di cui ogni elemento è una somma algebrica di m^{r-1} minori di ordine r del dato determinante*, (Torelli).

Il caso particolare corrispondente ad $r = 2$ forma un teorema di Glaisher.

2. *Un gobbo circolante di ordine rm è esprimibile mediante un gobbo circolante di ordine m, di cui ogni elemento è somma algebrica di m^{r-1} minori di ordine r contenuti nel dato determinante.*

3. *Un circolante di ordine $2m$ è il prodotto di un circolante di ordine m per un gobbo circolante dello stesso ordine m* (Scott).

Per semplicità dimostreremo il teorema 1.) solo nel caso di $r = 2$. La dimostrazione potrà poi senza difficoltà nuove estendersi al caso generale (v. Torelli citato).

Sappiamo che il circolante di ordine $2m$ è eguale a

$$(-1)^{(m-1)} \prod_{i=1}^{2m} (a_1 + a_2 \alpha_i + \ldots + a_{2n} \alpha_i^{2m-1})$$

dove

$$\alpha_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots 2m)$$

è una radice qualunque dell'equazione binomia

$$x^{2m} = 1.$$

Indicando con

$$y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

le radici di

$$x^m = 1,$$

le α_i saranno a due a due eguali in valore assoluto alle $\sqrt{y_j}$, ma una di segno contrario, e una del medesimo segno. Quindi possiamo scrivere

$$(-1)^{m-1} \prod_{j=1}^{m} \left(a_1 + a_2 \sqrt{y_j} + \ldots + a_{2m} \sqrt{y_j^{\,2m-1}}\right) \times$$
$$\times \left(a_1 - a_2 \sqrt{y_j} + \ldots - a_{2m} \sqrt{y_j^{\,2m-1}}\right)$$

cioè

$$(-1)^{m-1} \prod_{j=1}^{n} \Big[(a_1 + a_3 y_j + a_5 y_j^2 + \ldots + a_{2m-1} y_j^{\,m-1})^2 -$$
$$- (a_2 + a_4 y_j + \ldots + a_{2m} y_j^{\,m-1})^2 y_j \Big].$$

Ricordando che $y_j^m = 1$, si può trasformare la parte in parentesi in un polinomio ordinato secondo le potenze di y_j, sino alla potenza $m - 1^{ma}$. Esaminiamo i diversi coefficienti dello sviluppo. È facile riconoscere che tali coefficienti non sono che somma di minori di 2.° ordine contenuti nel circolante dato.

P. es., *se m è dispari*, il primo coefficiente è

$$a_1^2 + 2\, a_3\, a_{2m-1} + 2\, a_5\, a_{2m-3} + \ldots + 2\, a_m\, a_{m+2} -$$
$$- a^2_{m+1} - 2 a_{m-1}\, a_{m+3} - 2 a_{m-3}\, a_{m+5} - \ldots - 2 a_2\, a_{2m}$$

e *se m è pari*, il primo coefficiente è invece

$$a_1^2 + 2a_3 a_{2m-1} + 2a_5 a_{2m-3} + \ldots + 2a_{m-1} a_{m+3} + a^2_{m+1} -$$
$$- a_m a_{m+2} - 2\, a_{m-2}\, a_{m+4} - 2\, a_{m-4}\, a_{m+6} - \ldots -$$
$$- 2\, a_2\, a_{2m} - a_m\, a_{m+2}$$

e ciascuna di queste espressioni è la somma algebrica di minori di 2.° ordine contenuti nel dato determinante.

Così si procederebbe per gli altri coefficienti.

Chiamando allora $p_1\, p_2 \ldots p_m$ tali coefficienti si ha che il circolante dato diventa a meno del segno

$$\prod_{j=1}^{n} (p_1 + p_2\, y_j + \ldots + p_m\, y_j^{\,m-1})$$

cioè diventa il circolante di ordine m formato cogli elementi p.

Analogamente si potrebbe procedere per il gobbo circolante e si ha allora il teorema 2).

Dimostriamo ora direttamente il teorema 3.).

Supponiamo un circolante di ordine $2\,m$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{2m} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{2m-1} & a_{2m} & \ldots & a_{m-1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & a_{m+3} & \ldots & a_{2m} & a_1 & \ldots & a_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2m} & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m & \ldots & a_{2m-1} \end{vmatrix} .$$

Aggiungiamo alla $m+1^{ma}$ linea, la prima; alla $m+2^{ma}$ linea la seconda, e così di seguito. Indi dalla prima colonna togliamo la $m+1^{ma}$, dalla 2.ª la $m+2^{ma}$ ecc. È facile vedere che allora tutti gli elementi contenuti nelle ultime m linee ed m colonne diventano eguali a zero, e quindi il determinante di ordine $2m$ si riduce al prodotto di due minori di ordine m che sono propriamente

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_{m+1}, & a_2 - a_{m+2}, & \dots & a_m - a_{2m} \\ a_2 - a_{m+2}, & a_3 - a_{m+3}, & \dots & a_{m+1} - a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m - a_{2m}, & a_{m+1} - a_1, & \dots & a_{2m-1} - a_{m-1} \end{vmatrix}$$

che è un *gobbo circolante*, e

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_m \\ a_2 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_m & \dots & a_{m-1} \end{vmatrix}$$

che è un *circolante*. Con ciò è dimostrato il teorema.

Nel citato lavoro del Torelli è generalizzato questo teorema al caso dell'ordine rm.

Vogliamo aggiungere altre considerazioni sui circolanti dedotte dalla citata nota di Stern (*Crelle* Vol. LXXIII).

Indichiamo con

$$A_1\, A_2 \dots A_n$$

i complementi algebrici degli elementi $a_1\, a_2 \ldots a_n$ della prima linea di un circolante C di ordine n.

Allora evidentemente si hanno le relazioni

$$\begin{array}{l}
a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_n \quad A_n = C \\
a_2 A_1 + a_3 A_2 + \ldots + a_1 \quad A_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n A_1 + a_1 A_2 + \ldots + a_{n-1} A_n = 0
\end{array}$$

donde sommando si ha:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = D.$$

Di qui appare, ricordando che D è il prodotto di tutti i fattori della forma

$$a_1 + a_2 \alpha + \ldots + a_n \alpha^{n-1}$$

dove α è una radice n^{ma} dell'unità (compreso 1), che la somma dei minori $A_1 + A_2 + \ldots A_n$ non è altro che il prodotto di tutti i fattori della forma precedente ma dove però è escluso il caso di $\alpha = 1$.

Possiamo dimostrare questo teorema:

Se $a_1 \ldots a_n$ sono numeri interi tali che

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$$

la espressione

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

è divisibile per n.

Infatti prima di tutto si può subito riconoscere che il complemento algebrico A_1 dell'elemento a_1 che compare nella prima linea, è eguale esattamente a quello di a_1 che compare nella seconda

linea ecc., cioè gli n^2 minori di ordine $n-1$ sono ad n ad n eguali fra loro.

Allora la derivata di C rispetto ad un elemento a_r sarà eguale ad n volte il complemento algebrico di a_r considerato come elemento della prima linea, cioè

$$A_r = \frac{1}{n} \frac{\partial C}{\partial a_r}$$

ed essendo

$$C = a \,.\, A$$

si ha

$$\frac{\partial C}{\partial a_r} = A + a \frac{\partial A}{\partial a_r}$$

donde

$$n\,(A_r - A_s) = a \left(\frac{\partial A}{\partial a_r} - \frac{\partial A}{\partial a_s} \right).$$

Se $a = 0$ allora $A_r = A_s$ per qualunque combinazione degli indici r e s, cioè

$$A_r = \frac{A}{n}$$

ed essendo A_r evidentemente un numero intero se le $a_1 \ldots a_n$ sono numeri interi, si ha che A è divisibile per n.

È notevole quest' altra osservazione sui circolanti.

Il prodotto di due circolanti dello stesso ordine si può esprimere come un altro circolante (Souillart, Nouv. Annal. de math. 2.^{e} s., t. 19, p. 320).

Per dimostrare il teorema basta mutare la forma di uno dei circolanti, cioè, in uno di essi, porre a 2.° posto l'ultima linea, a 3.° posto l'antipenultima e così di seguito; invertire cioè l'ordine delle linee a cominciare dalla seconda.

I due circolanti sono allora

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = A$$

e

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ b_n & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_n & b_1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n-1.n-2}{2}} B.$$

Il prodotto per linee di A e B è allora

$$A.B = (-1)^{\frac{n-1.n-2}{2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \end{vmatrix}$$

dove

$$c_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$
$$c_2 = a_2 b_1 + a_3 b_2 + \ldots + a_1 b_n$$
$$c_3 = a_3 b_1 + a_4 b_2 + \ldots + a_2 b_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il segno sarà $+$ se n è delle forme $4p+1$ o $4p+2$, e sarà $-$ se n è delle forme $4p$, $4p+3$.

La trasformazione operata nel circolante B corrisponde a formare le linee successive alla prima, permutando gli elementi in senso *inverso* a quello nel quale sono permutati gli elementi in A.

§ 21. — DETERMINANTI DI PUCHTA-NOETHER.

Passiamo a considerare certi altri speciali determinanti simmetrici studiati da PUCHTA e NOETHER:

PUCHTA, *Deutsch. d. Wien. Akad.* Volume XXXVIII, p. 315, (1878).

PUCHTA, *Denks. d. Wien. Akad.* Vol. XLIV, p. 277 (1882).

NOETHER, *Zur Theorie der Thetafunctionen*, Math. Ann. Vol. XVI, p. 270, v. il § 15 a p. 322.

NOETHER, *Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten*, M. A. Vol. XVI, p. 551.

Tali determinanti sotto la loro forma più semplice sono formati nella seguente maniera.

Sono determinanti di ordine 2^n, e inoltre i loro

elementi a_{rs} soddisfanno alle relazioni

$$a_{r+2^{k-1}, s+2^{k-1}} = a_{rs} = a_{sr}$$

dove $k = 1, 2, \ldots$.

Una tal relazione fra gli elementi fa in modo che la matrice di questi determinanti può immaginarsi composta di quattro matrici quadrate

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$$

tali che sono eguali quelle che si corrispondono in diagonali, e inoltre che ciascuna di queste matrici quadrate forma un determinante che gode a sua volta della medesima proprietà della quale gode il determinante totale e così di seguito.

La forma di un tal determinante è la seguente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \ldots \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & \ldots \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & \ldots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & \ldots \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & \ldots \\ a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & \ldots \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} .$$

Nel secondo lavoro citato di Puchta e nel secondo di Noether, gli autori generalizzano ancora questi determinanti e costruiscono dei determinanti di ordine $n_1 n_2 \ldots n_\mu$ e la cui formazione è simile a quella indicata.

Dimostriamo il teorema importante:

Il determinante Δ *si esprime come il prodotto di* 2^μ *fattori, lineari negli elementi* a.

Per un determinante di 2.° ordine infatti si ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - a_2^2 = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2).$$

Per un determinante di 4.° ordine si ha, aggiungendo alla terza linea gli elementi della prima linea, e alla quarta linea gli elementi della seconda, e poi togliendo dagli elementi della prima colonna quelli della terza, e dagli elementi della seconda colonna quelli della quarta,

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_4 & a_3 & a_4 \\ a_2 - a_4 & a_1 - a_3 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 \\ 0 & 0 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 \end{vmatrix}$$

cioè

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_4 \\ a_2 - a_4 & a_1 - a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 + a_3 & a_2 + a_4 \\ a_2 + a_4 & a_1 + a_3 \end{vmatrix}$$

cioè si vede che il determinante di quart' ordine si riduce al prodotto di due determinanti di 2.°

ordine formati nella stessa maniera. Per il determinante di 4.° ordine il teorema è dunque dimostrato. Ma è facile vedere che con un procedimento analogo si può dimostrare per qualunque caso, cioè si può sempre trasformare il determinante in modo che tutto il quadrato inferiore a sinistra resti composto di elementi zero, e i due quadrati (superiore a sinistra e inferiore a destra) sieno dei determinanti di ordine metà ma formati nella stessa maniera del dato. Con ciò il teorema resta dimostrato in generale.

La stessa proprietà si conserva anche pei determinanti analoghi più generali (cioè non solo di ordine 2^n) studiati dagli autori sunnominati.

Un'altra proprietà facile a riconoscersi è la seguente:

I complementi algebrici di due elementi eguali sono anche determinanti eguali, quindi il determinante reciproco di uno di questa forma, è ancora della stessa specie.

E inoltre:

In un determinante della specie indicata, i minori complementari di ordine metà sono sempre fra loro eguali a meno del segno.

La prima di queste due proprietà è comune anche ai circolanti.

Sono stati studiati degli altri determinanti la cui formazione ha molta analogia con quelli di Noether.

Il Signor W. Woigt in un lavoro di fisica (*Annalen der Physik* ecc., von Wiedemann. Vol. XVI, p. 273) considerò i determinanti di ordine $2n$

tali che i loro elementi hanno le relazioni

$$a_{2k,2\lambda-1} = -a_{2k-1,2\lambda}$$
$$a_{2k,2\lambda} = -a_{2k-1,2\lambda-1}.$$

Per $n = 2$ si avrebbe p. es. il determinante della seguente forma

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & -a & -d & -c \\ e & f & g & h \\ -f & -e & -h & -g \end{vmatrix}.$$

Si dimostra che *tal determinante è la somma di due quadrati.* Sullo stesso argomento si può anche vedere un lavoro di Drude, (*Göttingen Nachrich.*, 1887).

Il Gegenbauer in due lavori (*Sitz. Wiener Akad.* Vol. XCVI, parte 2.ª, p. 5 e p. 489, 1887) studia altri determinanti analoghi a questi, e ne trova uno che è la somma di un quadrato e di un triplo quadrato, e un altro che è la somma di quattro quadrati.

I determinanti ora studiati, (che abbiamo chiamati di Puchta-Noether) hanno delle affinità coi circolanti. Come questi, anche essi soddisfanno alla notevole proprietà di decomporsi nel prodotto di tanti fattori razionali lineari per quanto è il loro ordine.

Si potrebbero studiare dei determinanti più generali che comprendono come casi particolari sia i circolanti, che quelli studiati in questo paragrafo.

Immaginiamo n quantità, ed un gruppo di sostituzioni fra queste quantità, gruppo che abbia solo n sostituzioni; cioè, come si dice nella teoria delle sostituzioni, abbia l'ordine eguale al grado. Allora in una prima linea disponiamo gli n elementi; nelle altre linee disponiamo gli stessi elementi ma permutati successivamente secondo le sostituzioni del gruppo. Si viene così a formare un determinante che come caso particolare contiene i circolanti e quelli di Puchta-Noether.

§ 22. — Sui determinanti formati coi minori di un altro. Teoremi di Sylvester e di Franke.

Abbiamo visto che il determinante *reciproco* di un dato è quello formato coi complementi algebrici (minori di ordine $n-1$) degli elementi del dato; e abbiamo visto che esistono semplici relazioni fra il reciproco e il dato; e fra i minori del reciproco e quelli del dato.

Ora una spontanea generalizzazione di questa considerazione è quella di studiare i determinanti formati non più coi minori di ordine $n-1$ del dato, ma coi minori di ordine *qualunque*.

Siffatti determinanti sono stati studiati da vari autori.

La letteratura sull'argomento è la seguente in ordine cronologico:

Sylvester, *Philos. Magazine*, serie IV. Vol. I (1851).

Spottiswoode, *Elementary theorems relating to determinants.* Crelle. Vol. LI.

Janni, *Nota sopra i determinanti minori di un dato determinante.* Giorn. di Batt. Vol. I, p. 270 (1863).

In questa Nota l'autore non si accorge di una ulteriore e semplice riduzione del teorema, del resto già dato dagli Autori precedenti.

Franke, *Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten.* Crelle. T. LXI, p. 350 (1863).

In questo lavoro al teorema già noto si aggiungono altri teoremi nuovi.

Borchardt, *Crelle.* T. LXI, p. 353.

D'Ovidio, *Nota sui determinanti di determinanti.* Acc. Torino, 1876.

D'Ovidio, *Addizioni alla nota sui determinanti di determinanti.* Acc. Torino, 1877.

In questa nota l'autore osserva che alcuni teoremi da lui dati nella nota precedente erano già dati da Spottiswoode e Sylvester.

Picquet, *Sur les déterminants dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné.* Comptes Rendus. T. LXXXVI, p. 310, 1878.

Picquet, *Analyse combinatoire des déterminants.* Journal de l'École Polytechnique. T. XXVIII, pagina 201, 1878.

Hunyady, *Acad. des sciences de Budapest.* 1880.

Barbier, *Sur une formule de Lagrange*, ecc. Comptes Rendus, 1883. T. XCVI, p. 1845.

Barbier, *Généralisation du théorème de Jacobi*, ecc. Comptes Rendus, 1883. T. XCVII, p. 82.

Qui l'autore dà come nuovi teoremi già trovati dagli autori precedenti.

Frobenius, *Crelle*. Vol. LXXXVI, p. 54.

Sylvester, *Sur les déterminants composés*. Crelle. Vol. LXXXVIII, p. 49 (1879).

In questa memoria in cui l'autore adopera inutilmente delle complicate notazioni, compariscono degli errori corretti poi da Borchardt nel lavoro:

Borchardt, *Rémarque relative au Mémoire de M. Sylvester sur les déterminants composés*. Crelle. Vol. LXXXIX, p. 82 (1880).

D'Ovidio, *Altra addizione alla nota sui determinanti di determinanti*. Acc. Torino, 1890.

Velzer, *Compound Determinants*. American Journal. Vol. VI, p. 164 (1883).

Scott, *Proc. of the London Math. Society*. Volume XIV, p. 91.

Netto, *Zwei Determinantensätze*. Acta Math. Vol. XVII, p. 199 (1893).

Musso, *Sui determinanti reciproci*. Giornale di Batt. Vol. XXXI, p. 201 (1893).

In questo lavoro l'autore procede mostrando di non conoscere affatto tutti i lavori precedenti, e giunge anche ad un teorema affatto incompleto. Egli ha perciò pubblicato una seconda nota sullo stesso argomento dopo aver preso cognizione dei lavori principalmente del D'Ovidio:

Musso, *Ancora sui determinanti reciproci*. Giorn. di Batt. Vol. XXXII, p. 81 (1894).

Netto, *Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegungssatzes*. Crelle. Vol. CXIV, p. 345.

In un determinante D di ordine n esistono $\binom{n}{m}^2$ minori di ordine $m < n$, indicando con $\binom{n}{m}$ il nu-

mero binomiale

$$\frac{n \cdot n-1 \ldots n-m+1}{1 \cdot 2 \ldots m}.$$

Infatti un minore di ordine m si forma scegliendo m orizzontali e m verticali; ora le m orizzontali possono scegliersi in $\binom{n}{m}$ modi e le m verticali anche in $\binom{n}{m}$ modi diversi.

Cogli $\binom{n}{m}^2$ minori presi come elementi possiamo formare un determinante di ordine $\binom{n}{m}$; in una stessa linea porremo tutti i minori ottenuti colle medesime m linee di D, e in una stessa colonna quelli ottenuti colle medesime m colonne di D.

Possiamo supporre ordinati questi elementi in modo che nella diagonale principale del nuovo determinante compariscano i minori principali di ordine m del dato; allora è facile vedere che risulterà che se l'elemento, che nel nuovo determinante occupa il posto di indici r, s, è il minore costituito delle linee di ordini $l_1\, l_2 \ldots l_m$, e dalle colonne di ordini $c_1\, c_2 \ldots c_m$, l'elemento che occuperà il posto di indici s, r sarà il minore costituito dalle linee di ordini $c_1\, c_2 \ldots c_m$ e dalle colonne di ordini $l_1\, l_2 \ldots l_m$.

Per fissare le idee possiamo supporre di collocare nella prima linea, prima tutti i minori di classe pari e poi in seguito tutti quelli di classe

dispari. Allora è facile vedere che la matrice si può dividere in quattro parti in modo che nel primo quadrato superiore a sinistra vi sono tutti minori di classe pari; nel quadrato inferiore a destra vi sono anche tutti i minori di classe pari, e nei due rettangoli, superiore a destra, e inferiore a sinistra vi sono tutti i *minori* di classe dispari. Questi sono perciò disposti in s linee e s colonne di cui le s^2 intersezioni sono *minori* di classe pari.

Possiamo supporre che i minori di classe dispari figurino in questo determinante col segno negativo, ovvero col segno positivo, come gli altri; il valore del determinante sarà in ogni caso lo stesso, perchè un determinante resta inalterato mutando i segni agli elementi che si trovano su s linee e a quelli che si trovano su s colonne, e non a quelli che si trovano sulle intersezioni delle s linee colle s colonne.

Chiamiamo D_m il determinante così formato.

Possiamo formare similmente il determinante D_{n-m}, e distribuire in questo gli elementi, in modo che in D_m e D_{n-m} i minori complementari di D occupino posti omologhi.

In *uno* di questi due determinanti mutiamo il segno agli elementi che sono minori di classe *dispari*; e poi facciamo il prodotto di D_m per D_{n-m}.

È facile vedere che nel prodotto tutti gli elementi, meno quelli della diagonale principale, sono zero, per il teorema che la somma dei prodotti dei minori contenuti in m linee, per i complementi algebrici di quelli contenuti in m linee parallele è zero. Gli elementi della diagonale principale risultano invece tutti eguali al determinante dato D;

dunque possiamo conchiudere

$$D_m\, D_{n-m} = D^{\binom{n}{m}}.$$

Considerando che D_m D_{n-m} sono funzioni intere negli elementi di D, e che D essendo un determinante generale non si scinderà in generale in fattori interi razionali nei suoi n^2 elementi, si ricava che la precedente relazione non può sussistere se ciascuno dei fattori del primo membro non è a sua volta una potenza di D.

Per determinare a quale potenza di D è eguale D_m basta osservare qual' è il grado di un termine qualunque di D_m.

Ora ogni termine di D_m risulta di $\binom{n}{m}$ fattori, ognuno di grado m, dunque ogni termine di D_m è di grado

$$m\binom{n}{m} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\,.\,.\, n-m+1}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, m-1},$$

mentre ogni termine di D è di grado n, dunque D_m sarà eguale alla potenza $\left[\frac{m}{n}\binom{n}{m}\right]^{ma}$ di D, cioè

$$D_m = D^{\binom{n-1}{m-1}}$$

e quindi anche

$$D_{n-m} = D^{\binom{n-1}{m}}.$$

Per convincersi che queste eguaglianze devono

sussistere *anche nel segno*, basta supporre in D tutti gli elementi (meno i principali) nulli, ed allora anche in D_m risultano nulli tutti gli elementi, meno i principali, e i due membri dell'eguaglianza risultano senz'altro eguali *in valore e in segno.*

Possiamo dunque dire:

Dato un determinante D di ordine n, se si forma nella maniera indicata il determinante di ordine $\binom{n}{m}$ *avente per elementi tutti i minori di ordine m del dato, si ha un determinante che è la potenza* $\binom{n-1}{m-1}^{ma}$ *del dato* (Sylvester).

Come si vede, questo teorema contiene come caso particolare quello sui determinanti reciproci.

Passiamo ora a cercare se anche qui può trovarsi un teorema analogo a quello che si trova nel caso dei determinanti reciproci e che dà il valore di un *minore* del reciproco espresso mediante i *minori* del dato.

Per fissare le idee e per riuscire più chiaro, è molto meglio di supporre un caso speciale, e su questo eseguire il procedimento, il quale, come facilmente si riconosce, è di tal natura da potersi sempre estendere al caso più generale.

Il determinante D sia di 4.° ordine, e sia $m = 2$. I due determinanti D_m D_{n-m} saranno di 6.° ordine. I minori $A^{(2)}$ cioè gli elementi di D_2, rappresentiamoli con $\binom{i\,j}{k\,h}$ intendendo che $i\,j$, $k\,h$ sieno rispettivamente i due indici delle linee e i due indici delle colonne che concorrono a formare il minore.

Allora il determinante D_2 è

$$D_2 = \begin{vmatrix} \binom{12}{12} & \binom{12}{23} & \binom{12}{34} & \binom{12}{14} & \binom{12}{13} & \binom{12}{24} \\ \binom{23}{12} & \binom{23}{23} & \binom{23}{34} & \binom{23}{14} & \binom{23}{13} & \binom{23}{24} \\ \binom{34}{12} & \binom{34}{23} & \binom{34}{34} & \binom{34}{14} & \binom{34}{13} & \binom{34}{24} \\ \binom{14}{12} & \binom{14}{23} & \binom{14}{34} & \binom{14}{14} & \binom{14}{13} & \binom{14}{24} \\ \binom{13}{12} & \binom{13}{23} & \binom{13}{34} & \binom{13}{14} & \binom{13}{13} & \binom{13}{24} \\ \binom{24}{12} & \binom{24}{23} & \binom{24}{34} & \binom{24}{14} & \binom{24}{13} & \binom{24}{24} \end{vmatrix}.$$

Il determinante D_{n-m} è lo stesso D_2 ma quando si scambia l'ordine di tutti gli elementi in modo conveniente, cioè

$$D_{n-m} = D'_2 = \begin{vmatrix} \binom{34}{34} & \binom{34}{14} & \binom{34}{12} & \binom{34}{23} & \binom{34}{24} & \binom{34}{13} \\ \binom{14}{34} & \binom{14}{14} & \binom{14}{12} & \binom{14}{23} & \binom{14}{24} & \binom{14}{13} \\ \binom{12}{34} & \binom{12}{14} & \binom{12}{12} & \binom{12}{23} & \binom{12}{24} & \binom{12}{13} \\ \binom{23}{34} & \binom{23}{14} & \binom{23}{12} & \binom{23}{23} & \binom{23}{24} & \binom{23}{13} \\ \binom{24}{34} & \binom{24}{14} & \binom{24}{12} & \binom{24}{23} & \binom{24}{24} & \binom{24}{13} \\ \binom{13}{34} & \binom{13}{14} & \binom{13}{12} & \binom{13}{23} & \binom{13}{24} & \binom{13}{13} \end{vmatrix}.$$

Ora consideriamo un qualunque minore di D_2; per fissare le idee consideriamo il primo minore principale di 3.° ordine, che scriveremo come segue:

$$N = \begin{vmatrix} \binom{12}{12} & \binom{12}{23} & \binom{12}{34} & \binom{12}{14} & \binom{12}{13} & \binom{12}{24} \\ \binom{23}{12} & \binom{23}{23} & \binom{23}{34} & \binom{23}{14} & \binom{23}{13} & \binom{23}{24} \\ \binom{34}{12} & \binom{34}{23} & \binom{34}{34} & \binom{34}{14} & \binom{34}{13} & \binom{34}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

In tal maniera esso è ridotto ad un determinante di 6.° ordine come D_2'. Moltiplichiamolo per D'_2 dopo che in D'_2 si sono mutati i segni a tutti gli elementi che rappresentano minori di classe dispari, cioè agli elementi di posti

15, 16,
25, 26,
35, 36,
45, 46,

51, 61,
52, 62,
53, 63,
54, 64.

Eseguendo la moltiplicazione per linee si ha

$$\begin{vmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ \binom{34}{23} & \binom{14}{23} & \binom{12}{23} & \binom{23}{23} & \binom{24}{23} & \binom{13}{23} \\ \binom{34}{24} & \binom{14}{24} & \binom{12}{24} & \binom{23}{24} & \binom{24}{24} & \binom{13}{24} \\ \binom{34}{13} & \binom{14}{13} & \binom{12}{13} & \binom{23}{13} & \binom{24}{13} & \binom{13}{13} \end{vmatrix} \cdot$$

che è eguale a

$$D^3 \cdot \begin{vmatrix} \binom{23}{23} & \binom{24}{23} & \binom{13}{23} \\ \binom{23}{24} & \binom{24}{24} & \binom{13}{24} \\ \binom{23}{13} & \binom{24}{13} & \binom{13}{13} \end{vmatrix}$$

cioè il prodotto del minore di 3.° ordine N che si considera, per D_{n-m} è eguale al prodotto della 3.ª potenza di D per il complemento dell'omologo di N nel determinante D_{n-m}. Questo procedimento che non è che la opportuna estensione di quello eseguito nell'analogo caso dei determinanti reciproci (v. § 8) è affatto generale, e si vede quindi che può enunciarsi il teorema:

Il prodotto di un minore $N_m^{(k)}$ di ordine k, di D_m moltiplicato per D_{n-m} è eguale alla potenza

k^{ma} di D moltiplicata per il complemento dell'omologo di N in D_{n-m}

Cioè

$$N_m^{(k)} D_{n-m} = D^k . N'_{n-m}{}^{\left(\binom{n}{m}-k\right)}$$

indicando con

$$N'_{n-m}{}^{\left(\binom{n}{m}-k\right)}$$

il complemento dell'omologo di N in D_{n-m}. Sapendo allora che

$$D_{n-m} = D^{\binom{n-1}{m}}$$

si ha

$$N_m^{(k)} = N'_{n-m}{}^{\left(\binom{n}{m}-k\right)} D^{k-\binom{n-1}{m}}$$

donde si vede:
che un minore N di D_m si può esprimere come il prodotto di una potenza di D, per il complemento del suo omologo in D_{n-m} (teorema di FRANKE, Op. citata).

§ 23. — ALTRI TEOREMI DI SYLVESTER, DI D'OVIDIO, ECC.

Accanto a questi due teoremi fondamentali si raggruppano tanti altri teoremi trovati da vari autori che noi passeremo ora ad esporre.

Facciamo il determinante Δ *di ordine* $\binom{n}{m}$ *che ha per elementi i prodotti degli elementi omologhi nei due determinanti* D_m, D_{n-m} *supposto ordinati gli elementi in questi determinanti in modo che gli elementi omologhi sieno minori complementari in* D *e che in uno di essi gli elementi che rappresentano minori di classe dispari, si scrivano col segno mutato. Tal determinante è eguale ad un multiplo di* D.

In effetti, in esso alla prima colonna aggiungendo tutte le altre, si ha una colonna in cui tutti gli elementi sono eguali a D, e quindi il determinante sarà divisibile per D.

Se prima di formare Δ, in uno dei determinanti D_m D_{n-m} scambio le linee in modo che *almeno una* linea resti al suo posto, allora il risultato è il medesimo, perchè, collo stesso procedimento, nella prima colonna si hanno o elementi zero o elementi D; se invece nessuna linea conserva il suo posto primitivo, allora evidentemente il risultato è zero cioè allora $\Delta = 0$.

Nel determinante D consideriamo λ linee e λ colonne: sia $D_{\lambda\lambda}$ il minore di D quando si sono soppresse le λ linee e λ colonne. Nel determinante *reciproco* di D cioè in D_{n-1} consideriamo le λ linee e colonne omologhe, e sia C_λ il minore di D_{n-1}, formato colle intersezioni delle λ linee e colonne, cioè il complemento dell'omologo di $D_{\lambda\lambda}$ in D_{n-1}.

Si ha allora, come sappiamo

$$C_\lambda = D^{\lambda-1} D_{\lambda\lambda}.$$

Le λ linee e colonne scelte in D, combiniamole ad m ad m, e sopprimendo consecutivamente le m linee e colonne di ciascuna combinazione, si hanno in tutto $\binom{\lambda}{m}^2$ minori di ordini $n-m$ di D, i quali minori si possono disporre al solito modo da formare la matrice di un determinante di ordine $\binom{\lambda}{m}$ e che non è altro che un minore speciale del determinante $D_{n\ m}$. Chiamamolo $D_{\lambda m}$. Se ogni elemento di questo minore lo moltiplichiamo per D^{m-1}, per il teorema sui minori dei determinanti reciproci, abbiamo che ogni elemento diventa un minore di ordine m^{mo} del determinante C_λ, e si ha quindi il determinante di tutti i minori di ordine m del determinante C_λ.

In forza del teorema sopra dimostrato, tal determinante non è altro che la potenza

$$C^{\binom{\lambda-1}{m-1}}$$

cioè

$$D_{\lambda m} \,.\, D^{\binom{\lambda}{m}(m-1)} = C^{\binom{\lambda-1}{m-1}} = D^{\binom{\lambda-1}{m-1}(\lambda-1)}\, D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}}$$

donde

$$D_{\lambda m} = D^{\binom{\lambda-1}{m}}\, D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}}.$$

(La dimostrazione qui data è presa dal D'Ovidio, Op. cit.)

Abbiamo dunque il teorema (di Sylvester):

In D_{n-m} *un minore* $D_{\lambda m}$ *di ordine* $\binom{\lambda}{m}$ $(\lambda > m)$ *i cui elementi sono minori di* D *formati con* $n - \lambda$ *linee e colonne fisse, e tutte le combinazioni di* $\lambda - m$ *delle altre, è eguale alla potenza* $\binom{\lambda-1}{m}^{ma}$ *di* D *per la potenza* $\binom{\lambda-1}{m-1}^{ma}$ *di quel minore di* D *formato colle* $n - \lambda$ *linee e colonne fisse.*

Il signor Netto al § 3, pag. 201 della sua nota *Zwei Determinantensätze* (Acta math. Vol. XVII, pag. 199 (1893)) dimostra in modo diverso un caso particolare di questo teorema (quando $m = 1$). Sullo stesso teorema generale il medesimo autore è tornato più tardi a proposito di un'altra considerazione della quale avremo fra poco occasione di discorrere. (*Crelle*, Vol. CXIV.)

Al determinante minore $D_{\lambda m}$ di D_{n-m} possiamo far corrispondere in D_m il complemento del suo omologo, il quale è di ordine $\binom{n}{m} - \binom{\lambda}{m}$, e per un teorema sopra dimostrato (teor. di Franke) è eguale a

$$D_{\lambda m} \, . \, D^{\binom{n}{m} - \binom{\lambda}{m} - \binom{n-1}{m}}$$

cioè, in forza del teorema precedente, è

$$= D^{\binom{\lambda-1}{m} + \binom{n}{m} - \binom{\lambda}{m} - \binom{n-1}{m}} \; D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}}$$

$$= D^{\binom{n-1}{m-1} - \binom{\lambda-1}{m-1}} \; D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}}.$$

Il minore di D_m di cui qui si tratta ha per ele-

menti quei minori di ordine m di D formati con m linee e m colonne non contenute tutte intere fra le λ linee e colonne considerate, perchè l'omologo di $D_{\lambda m}$ in D_m è formato di tutti quei minori di ordine m di D contenuti tutti nelle λ linee e colonne, cioè in altri termini di tutti i minori di ordine m del complemento di $D_{\lambda\lambda}$; e quindi il suo complemento non può contenere come elementi nessuno di siffatti minori.

Abbiamo dunque il teorema (D'Ovidio):

Un minore di ordine $\binom{n}{m} - \binom{\lambda}{m}$ *di* D_m $\lambda > m)$ *i cui elementi sono tutti quei minori di ordine* m *di* D *formati con linee e colonne che non sieno tutte scelte fra certe* λ *linee e* λ *colonne fissate, è eguale alla potenza*

$$\left[\binom{n-1}{m-1} - \binom{\lambda-1}{m-1}\right]^{ma}$$

di D *moltiplicata per la potenza*

$$\binom{\lambda-1}{m-1}^{ma}$$

di quel minore di D *ottenuto sopprimendo quelle* λ *linee e* λ *colonne.*

Analogamente si potrebbe trovare una formola per il complemento di $D_{\lambda m}$ in D_{n-m}, il quale è l'omologo in D_{n-m} del minore di D_m ultimamente considerato. Si ha così una formola del D'Ovidio, Op. cit.

E in maniera simile si otterrebbero altri teoremi di D'Ovidio, di Piquet, ecc., che per brevità tralasciamo.

§ 24. — Problema più generale di Sylvester.

Nella citata Memoria di Sylvester (*Crelle*. Volume LXXXVIII, pag. 49) l'autore dopo avere introdotta una notazione difficile e inutilmente complicata vuol risolvere il seguente problema:

Supponiamo un determinante di ordine

$$n_1 + n_2 + \ldots = n.$$

Fra le prime n_1 linee scegliamone m_1; fra le n_2 linee seguenti scegliamone m_2 e così di seguito, e operiamo poi similmente riguardo alle colonne. Tutti gli elementi che si trovano nelle intersezioni delle $m_1 + m_2 + \ldots$ linee scelte e delle altrettante colonne formano a loro volta un determinante di ordine $m_1 + m_2 + \ldots = m$, il quale sarà evidentemente un minore del dato.

Formiamo tutti i possibili minori di questa specie che saranno in numero di

$$\left[\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\ldots\right]^2.$$

Con essi potrà formarsi un determinante che il Sylvester chiama determinante *composto* nel senso più generale. È chiaro che quando in particolare $n_2 = n_3 = \ldots = 0$, $n_1 = n$, allora si rientra nel caso considerato avanti. Nel caso particolare sappiamo che il determinante che si viene a formare non è che una potenza del primitivo.

Ora il Sylvester si propose il problema di estendere questo teorema al caso più generale.

Chiamando $(N_1)(N_2)\dots$ i determinanti formati dalle intersezioni delle prime n_1 linee colle prime n_1 colonne, ovvero dalle seconde n_2 linee, colle seconde n_2 colonne, etc., e inoltre indicando con $(N_1\ N_2)\ (N_1\ N_3)\dots$ i determinanti formati dalle n_1+n_2 linee e colonne ovvero dalle n_1+n_3 linee e colonne, etc., il Sylvester trovò una formola per mezzo della quale il determinante composto generale si esprimeva come prodotto di potenze di $(N_1)\ (N_2)\dots(N_1\ N_2)\dots(N_1\ N_2\ N_3)\dots\dots$ che sono in fondo certi speciali *minori principali* del determinante dato.

La formola di Sylvester però è erronea come poi fu riconosciuto con un esempio da Borchardt (a nome di Sylvester) nel volume LXXXIX del Giorn. di *Crelle* (p. 82).

Per riconoscere che effettivamente non è possibile esprimere quel determinante composto mediante un prodotti dei minori principali del tipo (N_1), $(N_1\ N_2)$, ... calcoliamo un caso speciale.

Supponiamo

$$n_1=2,\ n_2=2,\ n_1+n_2=n=4,$$

e

$$m_1=m_2=1,\ m_1+m_2=m=2.$$

Allora si ha un determinante D di quarto ordine la cui matrice si immagina divisa in quattro quadrati.

Chiamiamo

$$\begin{matrix} N_1 & N_{12} \\ N_{21} & N_2 \end{matrix}$$

rispettivamente i determinanti rappresentati da queste quattro matrici parziali.

Combinando 1.ª e 2.ª linea con 3.ª e 4.ª linea, e facendo analoghe combinazioni per le colonne, abbiamo in tutto 16 minori di 2.° ordine che formano a loro volta un determinante $D_2^{(4)}$ di 4.° ordine, il quale è un minore di 4.° ordine del determinante di 6.° ordine $D_m = D_2$ giusta la notazione avanti adottata.

Il determinante D_{n-m} è lo stesso D_2 ma dove si sono eseguite opportune trasposizioni di linee e colonne. È facile riconoscere che il complemento dell'omologo di $D_2^{(4)}$ in D_{n-m} è esattamente il determinante di 2.° ordine

$$(N_1\, N_2 - N_{12}\, N_{21})$$

dunque, per la formola data dal teorema di Franke, abbiamo che il determinante composto è eguale a (essendo $D = (N_1\, N_2)$

$$(N_1\, N_2)(N_1\, N_2 - N_{12}\, N_{21})$$

e non si esprime quindi solo come prodotto di $(N_1\, N_2)$, N_1, N_2 come vorrebbe la formola di Sylvester.

È notevole questa osservazione, che cioè in casi speciali l'esprimibilità voluta dalla formola di Sylvester è possibile.

Supponiamo p. es. che si tratti di un determinante di ordine $n_1 + n_2 = n$, e che si prenda

$$m_1 = n_1 = n - \lambda\,,\ n_2 = \lambda\,,\ m_2 = m.$$

Allora si rientra nelle ipotesi di un teorema dello

stesso Sylvester sopra dimostrato, e il determinante composto diventa quello da noi indicato $D_{\lambda m}$, e esso come si sa è esprimibile come prodotto di potenze del determinante intero e del minore principale formato colle prime n_1 linee e colonne.

§ 25. — Nuove ricerche di Netto e di altri.

Prima di terminare questa trattazione dobbiamo inserire qui alcune ricerche di Netto che si attaccano molto da vicino colle considerazioni svolte, intendiamo parlare della Memoria di Netto intitolata *Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegungssatzes* (*Crelle*, CXIV, p. 345).

Il minore ricavato da un determinante dato di ordine n, sopprimendo le linee di ordini $i_1\, i_2 \dots i_k$, e le colonne di ordini $j_1\, j_2 \dots j_k$ indichiamolo con

$$\Delta_{\substack{i_1 i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k}} .$$

Lo sviluppo del determinante sarà allora

$$\Sigma \pm \Delta_{\substack{i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k}} \Delta_{\substack{i_{k+1} \dots i_n \\ j_{k+1} \dots j_n}} \tag{a}$$

dove $i_1 \dots i_n$, $j_1 \dots j_n$ rappresentano due permutazioni dei numeri 1, 2, $\dots n$.

Consideriamo ora un determinante Δ di ordine $n+m$ che abbia per *primo minore principale* il determinante di ordine n ora considerato, il quale, giusta la notazione di sopra, resterà rappresentato

col simbolo

$$\Delta_{\substack{n+1\dots n+m \\ n+1\dots n+m}}.$$

Per questo nuovo determinante Δ formiamo una espressione sommatoria analoga a quella (a) ora scritta, dove però adesso i simboli $\Delta_{\substack{i_1\dots i_k \\ j_1\dots j_k}}$ rappresentano i minori del nuovo determinante, e quindi sono i minori antichi quando vi si aggiungano m linee e m colonne.

Si domanda qual'è allora il valore di quel sommatorio?

Il Netto dimostra che *il valore di quel sommatorio nel caso generale è eguale al determinante di ordine $n + m$ moltiplicato per la prima potenza del determinante di ordine m formato dalle m linee e colonne aggiunte, cioè del minore*

$$\Delta_{\substack{12\dots n \\ 12\dots n}}.$$

Se invece di partire dalla formola (a), *si parte da una formola più generale di scomposizione* (v. § 9) *cioè dal sommatorio di prodotti di k minori scelti rispettivamente in*

$$n_1 + n_2 + \ . \ . \ . + n_k = n$$

linee e colonne, allora il risultato è il prodotto di Δ per la potenza $k - 1^{ma}$ di $\Delta_{\substack{12\dots n \\ 12\dots n}}$.

Il Netto fa servire questo teorema per la dimostrazione di un teorema di Sylvester di cui noi abbiamo già trattato, cioè il teorema riguardante i minori del tipo $D_{\lambda m}$; (v. §. 23).

Noi intendiamo di dimostrare il teorema di Netto in un modo più facile di quello tenuto da quell'autore, e servendoci appunto degli stessi principii adoperati per il citato teorema di Sylvester; accanto ad esso troveremo poi un'altro teorema che può considerarsi come ad esso assai affine.

Premettiamo questo lemma:

Sappiamo che dato un determinante A di ordine n, esso può svilupparsi come somma algebrica di prodotti di k minori di cui il primo è contenuto nella matrice delle prime m_1 linee, il secondo in quelle delle altre m_2 linee, ecc., dove

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Si ha dunque, indicando con Δ tali minori,

$$\Sigma \pm \Delta_{m_1} \Delta_{m_2} \ldots \Delta_{m_k} = A$$

dove si sa in qual maniera bisogna intendere esteso il sommatorio.

Ci proponiamo ora questo problema: *nel sommatorio precedente in luogo di ciascun* Δ *poniamo il suo complementare; quale sarà il valore del sommatorio? Dimostreremo che tal valore sarà la potenza* $k - 1^{ma}$ *di* A.

Per $k = 2$ si ha quindi il medesimo A, risultato evidente da sè perchè allora è facile riconoscere che i diversi termini del sommatorio restano inalterati e solo si scambiano fra loro i due fattori.

Formiamo il determinante *reciproco* di A e sia A', ed in A' formiamo i minori omologhi ai Δ_i e sviluppiamo quindi A' colla formola

$$\Sigma \pm \Delta'_{m_1} \Delta'_{m_2} \ldots \Delta'_{m_k} = A'.$$

Sappiamo che $A' = A^{n-1}$, e che inoltre ogni Δ'_m è eguale a A^{m-1} moltiplicato per il complemento dell'omologo di Δ'_m cioè di Δ_m, il qual complemento è Δ_{n-m}. Dunque possiamo dire

$$A^{m_1+m_2+\ldots+m_k-i} \Sigma \pm \Delta_{n-m_1} \Delta_{n-m_2} \ldots \Delta_{n-m_k} = A^{n-1}$$

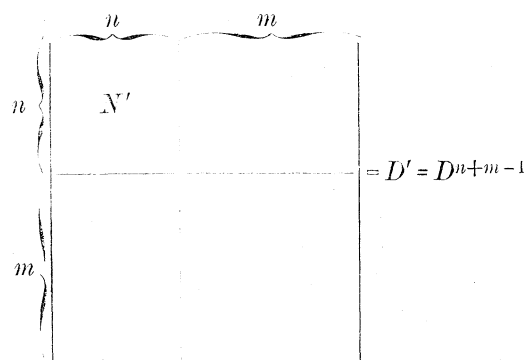
donde, essendo

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n,$$

si ha

$$\Sigma \pm \Delta_{n-m_1} \Delta_{n-m_2} \ldots \Delta_{n-m_k} = A^{k-1}$$

con che il teorema è dimostrato.

Consideriamo ora un determinante di ordine $n + m$ e il suo reciproco che noi rappresenteremo coi seguenti schemi

Facciamo lo sviluppo di N per prodotti di k minori di ordini $m_1\, m_2 \ldots m_k$, e indichiamo tali minori colla notazione avanti adottata. Si ha

$$\Sigma \pm \Delta_{m_1}\, \Delta_{m_2}\, \ldots\, \Delta_{m_k}$$

dove

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$$

e Δ_{m_1} sia il minore che si ottiene sopprimendo da N le linee di ordini

$$i'_1\; i'_2\; \ldots\; i'_{n-m_1}$$

e le colonne di ordini

$$j'_1\; j'_2\; \ldots\; j'_{n-m_1}$$

e così per $\Delta_{m_2} \ldots \Delta_{m_k}$.

Se ora intendiamo che $\Delta_{m_1}, \ldots$ sieno i minori ottenuti sopprimendo le linee e colonne indicate,

ma non da N, sibbene da tutto D, allora Δ_{m_1} diventa di ordine $m + m_1$, e così gli altri.

Moltiplichiamo quel sommatorio per

$$D^{m-m_1-1}\ D^{m-m_2-1}\ \ldots\ D^{m-m_k-1}$$

e osserviamo che, per il teorema sui minori dei determinanti reciproci, il prodotto

$$\mathit{\Delta}_{m_1}\ D^{n-m_1-1}$$

non è altro che il complemento dell'omologo di Δ_{m_1} in D'_1 cioè è Δ'_{n-m_1} ed è un minore di N'. Se da Δ_{m_1} sopprimiamo per un momento le ultime m colonne e m linee, esso ridiventa il minore di N, e Δ'_{n-m_1} non è altro allora che il complemento del suo omologo in N'.

Quindi tutto il sommatorio, dopo eseguito il prodotto indicato, non è altro che quello ottenuto quando si faccia lo sviluppo di N' come somma di prodotti di k minori, e poi in tal sommatorio, in luogo di ciascun minore, si ponga il suo complemento in N'.

Per il teorema sopra dimostrato il risultato è quindi

$$N'^{k-1}.$$

Ora per il teorema noto sui minori dei reciproci

$$N' = D^{n-1}\,.\,\Delta_{\substack{1.2\ldots n\\1.2\ldots n}}$$

dunque si ha

$$D^{n-m_1-1}\ D^{n-m_2-1}\ \ldots\ (\Sigma \pm \mathit{\Delta}_{m_1}\ \ldots\ \mathit{\Delta}_{m_k}) =$$
$$= D^{(n-1)(k-1)}\ \Delta_{\substack{1.2\ldots n\\1.2\ldots n}}^{\,k-1}$$

donde senz'altro (essendo $m_1 + m_2 + \ldots = n$)

$$\Sigma \pm \Delta_{m_1} \ . \ . \ . \ \Delta_{m_k} = D \, \Delta_{\substack{1.2 \ldots n \\ 1.2 \, . \, n}}{}^{k-1}$$

e con ciò resta dimostrato il citato teorema di Netto.

Possiamo però subito ricavarne anche un altro della stessa natura.

Nel determinante dato N formiamo prima di tutto il sommatorio che corrisponde al suo sviluppo; poi ad ogni minore sostituiamo il suo complemento e così formiamo il sommatorio

$$\Sigma \pm \Delta_{n-m_1} \ . \ . \ . \ \Delta_{n-m_k}$$

e poi intendiamo come prima che i Δ di questa espressione sieno i minori di N quando vi si aggiungano le m ultime linee e m colonne di D; così i Δ diventano minori di D, di ordini

$$n + m - m_1, \quad n + m - m_2, \ . \ . \ .$$

La differenza fra questo sommatorio e quello del teorema di Netto è questa, che mentre i fattori di ciascun termine della formola di Netto non hanno fra loro comune alcun elemento di N, o come diremo, non sono *intrecciati* in N ma solo fuori di N, qui invece i minori che costituiscono i fattori di uno stesso termine sono *intrecciati* dentro di N e fuori di N.

Con un procedimento analogo possiamo calcolare questo nuovo sommatorio; basta moltiplicarlo per

$$D^{m_1-1} \, D^{m_2-1} \ . \ . \ . \ D^{m_k-1}$$

e osservare che

$$\Delta_{n-m_1}\ D^{m_1-1}$$

non è altro che quel minore di D' omologo del complemento di Δ_{n-m_1} cioè omologo di Δ_{m_1}, o, ciò che è lo stesso, quel minore di N' omologo del minore Δ_{m_1} di N.

Quindi il sommatorio diventa niente altro che lo sviluppo di N' per prodotti di k minori, e quindi, sapendo il valore di N', si ricava

$$\Sigma \pm \Delta_{n-m_1} \ldots \Delta_{n-m_k} = D^{k-1} \Delta_{\substack{1.2\ldots n\\ 1.2\ldots n}}$$

cioè:

Si abbia un determinante di ordine $n+m$ e il suo primo minore principale di ordine n. Se nella formola di sviluppo di questo determinante di ordine n, per prodotti di k minori, ogni minore si sostituisce col suo complemento, e questo lo si sostituisce a sua volta col minore, del determinante di ordine $n+m$, ottenuto sopprimendo le linee e colonne dei medesimi ordini di quelle che bisognava sopprimere per ottenere il complemento di cui si parla, si ha per risultato la potenza $k-1^{ma}$ del determinante totale di ordine $n+m$, moltiplicata per il determinante formato dalle intersezioni delle ultime m linee e m colonne.

Per le considerazioni di questo § si può anche vedere Pascal, *Sopra un teorema di Netto*, ecc. (Acc. dei Lincei. Marzo 1896.)

§ 26. — Teorema di Hunyady.

Ai teoremi sviluppati sopra, occorre aggiungere anche il seguente che si può chiamare teorema di Hunyady perchè si trova in un lavoro geometrico di quest'autore. *(Beitrag zur Theorie des Flächen 2ter Grades — Crelle*, Vol. LXXXIX, pag. 58 (1879).)

Di questo teorema trattano poi anche Igel, *Monatsh.* III, p. 55; Escherich, Ibid., p. 68.

Sia dato un determinante di ordine n cogli elementi a_{rs}.

Formiamo n funzioni lineari con altrettante incognite aventi per coefficienti ordinatamente gli elementi delle varie linee.

Formiamo cioè

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}$$

e poi formiamo tutti i quadrati e i prodotti a due a due di queste espressioni. Formiamo un determinante che abbia per elementi delle prime n linee i coefficienti degli n quadrati, e per elementi delle altre linee i coefficienti degli altri $\frac{n(n-1)}{2}$ prodotti a due a due, e facciamo in modo naturalmente che in una stessa colonna compariscano i

coefficienti dei quadrati e dei prodotti delle *medesime* x.

Si ha così un determinante di ordine

$$n + \frac{n \,.\, n-1}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

che si può chiamare il determinante di Hunyady.

Per $n=2$ si ha p. es. il determinante

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11}^2 \;, & a_{12}^2 \;, & 2\, a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}^2 \;, & a_{22}^2 \;, & 2\, a_{21}\, a_{22} \\ a_{11}\, a_{21}, & a_{12}\, a_{22}, & a_{11}\, a_{22} + a_{12}\, a_{21} \end{array} \right| .$$

Ora il teorema cui alludiamo è questo, che *il valore di un determinante così formato è eguale alla potenza* $n+1^{ma}$ *del determinante dato.*

Questo teorema si può dimostrare col metodo stesso tenuto da Hunyady nel loc. cit.

Per fissare le idee supponiamo p. es. il caso di $n=3$. Allora il determinate è

$$H =$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{11}^2 \;, & a_{12}^2 \;, & a_{13}^2 \;, & 2\, a_{11}\, a_{12} \;, & 2\, a_{11}\, a_{13} \;, & 2\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}^2 \;, & a_{22}^2 \;, & a_{23}^2 \;, & 2\, a_{21}\, a_{22} \;, & 2\, a_{21}\, a_{23} \;, & 3\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}^2 \;, & a_{32}^2 \;, & a_{33}^2 \;, & 2\, a_{31}\, a_{32} \;, & 2\, a_{31}\, a_{33} \;, & 2\, a_{32}\, a_{33} \\ a_{11}a_{21}, & a_{12}a_{22}, & a_{13}a_{23}, & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}, & a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}, & a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} \\ a_{11}a_{31}, & a_{12}a_{32}, & a_{13}a_{33}, & a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}, & a_{11}a_{33} + a_{13}a_{31}, & a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} \\ a_{21}a_{3}\;, & a_{22}a_{32}, & a_{23}a_{33}, & a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}, & a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}, & a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} \end{array} \right|$$

Chiamiamo A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante dato di 3.° ordine D.

Aggiungiamo alla prima linea moltiplicata per A_{11} la quarta linea moltiplicata per A_{21} e la quinta moltiplicata per A_{31}; indi alla seconda linea moltiplicata per A_{21} la 4.ª moltiplicata per A_{11} e la 6.ª moltiplicata per A_{31}, e infine aggiungiamo alla 3.ª linea moltiplicata per A_{31} la 5.ª moltiplicata per A_{11} e la 6.ª moltiplicata per A_{21}.

Allora le tre prime linee diventano:

$$\begin{matrix} a_{11}\,D, & 0, & 0, & a_{12}\,D, & a_{13}\,D, & 0 \\ a_{21}\,D, & 0, & 0, & a_{22}\,D, & a_{23}\,D, & 0 \\ a_{31}\,D, & 0, & 0, & a_{32}\,D, & a_{33}\,D, & 0 \end{matrix}$$

e quindi, sviluppando il determinante per prodotti di minori contenuti nelle prime tre linee pei loro complementi, si ha

$$D^4 \,.\, \begin{vmatrix} a_{12}\,a_{22} & a_{13}\,a_{23} & a_{12}\,a_{23} + a_{13}\,a_{22} \\ a_{12}\,a_{32} & a_{13}\,a_{33} & a_{12}\,a_{33} + a_{13}\,a_{32} \\ a_{22}\,a_{32} & a_{23}\,a_{33} & a_{22}\,a_{33} + a_{23}\,a_{32} \end{vmatrix} .$$

A questa espressione risulta dunque eguale il prodotto del determinante di Hunyady per i tre complementi algebrici A_{11}, A_{21}, A_{31}.

Si potrebbe far vedere che il prodotto di questi tre complementi algebrici è esattamente eguale all'ultimo determinante di 3.° ordine scritto; ma anche senza passare a questa nuova dimostrazione, noi osserviamo che il prodotto $A_{11}\,A_{21}\,A_{31}$ non può avere per fattore D, perchè ciascuna delle A è indecomponibile in fattori, e D è anche inde-

componibile. Dunque il fattore D^4 che sta nell'ultima espressione non può che essere fattore del determinante H di Hunyady, ed esaminando poi i gradi rispettivi di un termine di questo e di un termine di D^4, si trova che non può essere che

$$H = c\ D^4$$

dove c è un costante che si trova eguale ad 1, supponendo in particolare che tutti gli elementi di D si riducano a zero, meno quelli della diagonale principale.

È facile convincersi che questo procedimento di dimostrazione si può eseguire in generale, e quindi in generale

$$H = D^{n+1}.$$

Per i determinanti di questa natura, i quali capitano nella teoria delle coniche, si possono vedere i seguenti lavori:

Hunyady, *Crelle*, Vol. LXXXIII, p. 76.
Mertens, *Crelle*, Vol. LXXXIV, p. 355.
Pasch, *Crelle*, Vol. LXXXIX, p. 247.
Caspary, *Crelle*, Vol. XCII, p. 123.

§ 27. — Determinanti i cui elementi sono formati mediante quelli di due determinanti dati. Teorema di Kronecker.

Accanto alle considerazioni fatte nel paragrafo precedente possono trovar posto quelle che si riferiscono ai determinanti i cui elementi sono formati mediante quelli di *due* dati determinanti.

Su questo argomento si trovano vari teoremi in diversi lavori. Vedi:

Sylvester, *Philos. Magaz.* Serie 4.ª, Tomo II, p. 142 (1851).

Picquet, *Comptes Rendus*, etc. T. LXXXVI, p. 1118.

Picquet, *Analyse combinatoire des déterminants.* Journ. de l'École Polyt. Tomo XXVIII, p. 214, 234, 237.

Kronecker, *Crelle*, Vol. LXXII, p. 152-153.

Siacci, *Alcune trasformazioni di determinanti.* Annali di mat. Vol. V, p. 296; Acc. di Torino, 1872.

Hensel, *Ueber die Darstellung der Determinanten eines System welches aus zwei anderen componirt ist.* Acta math. Vol. XIV, p. 317.

Netto, *Zwei Determinantensätze.* Acta math. Vol. XVII, p. 200.

Igel, *Zur Theorie der Determinanten.* Monatshefte, etc. Vol. III, p. 55.

ESCHERICH, *Ueber einige Determinanten.* Monatsh. etc. Vol. III, p. 68.

Uno dei teoremi più eleganti di questa teoria è quello cosiddetto *teorema di Kronecker.*

Sieno dati i due determinanti

A di ordine n cogli elementi a_{ij}

e

B di ordine m cogli elementi b_{hk}.

Formiamo tutti i prodotti

$$c_{pq} = a_{ij}\, b_{hk}$$

in numero di $n^2 m^2$, *e formiamo il determinante di ordine* $n\,m$, *cogli elementi* $a_{ij}\, b_{hk}$, *ponendo in una stessa linea tutti quelli per i quali sono costanti gli indici* i, h, *e in una stessa colonna quelli pei quali sono costanti i secondi indici* j, k. *Il determinante C delle c sarà allora eguale a*

$$A^m\; B^n\,.$$

Una facile dimostrazione di questo teorema è quella data da Netto (Op. cit.) fondandosi sullo sviluppo del determinante.

Per intendere meglio il procedimento che si può seguire in generale supponiamo il caso speciale di $n = 3$, $m = 2$.

Allora il determinante C è

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11}, & a_{11}\,b_{12}, & a_{12}\,b_{11}, & a_{12}\,b_{12}, & a_{13}\,b_{11}, & a_{13}\,b_{12} \\ a_{11}\,b_{21}, & a_{11}\,b_{22}, & a_{12}\,b_{21}, & a_{12}\,b_{22}, & a_{13}\,b_{21}, & a_{13}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11}, & a_{21}\,b_{12}, & a_{22}\,b_{11}, & a_{22}\,b_{12}, & a_{23}\,b_{11}, & a_{23}\,b_{12} \\ a_{21}\,b_{12}, & a_{21}\,b_{22}, & a_{22}\,b_{21}, & a_{22}\,b_{22}, & a_{23}\,b_{21}, & a_{23}\,b_{22} \\ a_{31}\,b_{11}, & a_{31}\,b_{12}, & a_{32}\,b_{11}, & a_{32}\,b_{12}, & a_{33}\,b_{11}, & a_{33}\,b_{12} \\ a_{31}\,b_{21}, & a_{31}\,b_{22}, & a_{32}\,b_{21}, & a_{32}\,b_{22}, & a_{33}\,b_{21}, & a_{33}\,b_{22} \end{vmatrix}\,.$$

Allora distinguiamo le linee di questo determinante in 3 sistemi di 2 linee ciascuno (in generale in n sistemi di m linee ciascuno), ponendo nello stesso sistema quelle linee i cui elementi situati sulla stessa colonna contengono il medesimo fattore a_{ij}. Allora un minore scelto nella matrice delle due prime linee avrà sempre per fattore il prodotto di due a, e l'altro fattore sarà o zero o il determinante delle b. Lo stesso si verifica per un minore scelto nella matrice della 3.ª e 4.ª linea, e per un minore scelto nella matrice della 5.ª e 6.ª linea.

Scomponendo il determinante come somma di prodotti di minori contenuti nelle due prime linee, nella 3.ª e 4.ª e nella 5.ª e 6.ª linea, ogni termine sarà quindi o zero, ovvero avrà per fattore il determinante delle B elevato a 3.ª potenza (in generale B^n). Quindi deduciamo che C ha per fattore B^n. Per la simmetria fra le a e b ricaviamo che lo stesso C ha anche per fattore A^m. Dunque

$$C = s \,.\, A^m \, B^n$$

dove esaminando il grado di C in a o in b si riconosce subito che s non può che essere una costante, e non può più dipendere dagli elementi a, b. Supponendo poi eguali a zero tutti gli a_{ij} dove gli indici i, j sono diversi, e tutti i b_{hk} dove h, k sono diversi, si riconosce subito $s = 1$; dunque infine

$$C = A^m \,.\, B^n \,.$$

Per altre dimostrazioni dello stesso teorema si

può vedere HENSEL ed ESCHERICH (Op. cit.), e RADOS, (*Math. Mittheilungen aus Ungarn,* Vol. VI, p. 268).

§ 28. — TEOREMI DI PICQUET, DI SYLVESTER ED ALTRI.

Passiamo ora ad un altro teorema dimostrato da PICQUET. (Op. cit., pag. 214.)

Sieno dati due determinanti A e B di ordine n. In uno di essi p. es. A sostituiamo in luogo di m colonne scelte in tutti i possibili modi, m colonne di B.

Ogni volta abbiamo un determinante di ordine n, e di questi ne abbiamo $\binom{n}{m}^2$. Il determinante D_m formato con essi disponendo in una stessa linea quelli che risultano sopprimendo le medesime m colonne di A, e in una stessa colonna quelli che risultano sostituendo in m colonne di A scelte in tutti i modi possibili, le medesime m colonne di B, è eguale a

$$A^{\binom{n-1}{m}} \; B^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Da questo teorema si deduce come caso particolare quello così detto di Sylvester, da noi dimostrato in un paragrafo precedente (v. § 22), come lo ha fatto vedere Picquet a pag. 216-217 dell'op. cit.

La dimostrazione del teorema è semplice.

Ogni elemento di D_m è un determinante che ha $n-m$ colonne di A e m colonne di B. Un tale determinante lo possiamo sviluppare come somma algebrica di prodotti di minori di ordine $n-m$ di A per minori di ordine m di B. Allora gli elementi della prima linea di D_m saranno somma di prodotti dei *medesimi* minori di ordine $n-m$ di A per i $\binom{n}{m}$ sistemi di minori di ordine m di B, ogni sistema essendo formato di tutti gli $\binom{n}{m}$ minori compresi fra le medesime m colonne.

Si vede così che D_m risulta espresso come prodotto di due determinanti, di cui l'uno ha per elementi i minori di ordine $n-m$ di A, e l'altro ha per elementi i minori di ordine m di B, quando si abbia cura di cambiare segno in uno di questi a quelli elementi che corrispondono a minori di classe dispari (il che come si sa non altera il valore del determinante).

Ma sappiamo (vedi § 22) che il determinante A_{n-m} che ha per elementi i minori di ordine $n-m$ di A ha per valore

$$A^{\binom{n-1}{m}}$$

e che quello ai minori di ordine m di B cioè B_m ha per valore

$$B^{\binom{n-1}{m-1}}$$

dunque il teorema è dimostrato.

Insieme al determinante D_m si può considerare

il determinante D_{n-m} ottenuto scambiando A con B, cioè ponendo in m colonne di B scelte in tutti i modi possibili m colonne di A.

Si ha quindi

$$D_{n-m} = A^{\binom{n-1}{m-1}} B^{\binom{n-1}{m}}.$$

Il prodotto dei due $D_m D_{n-m}$ sarà

$$A^{\binom{n}{m}} B^{\binom{n}{m}}.$$

Disponiamo gli elementi dei due determinanti D_m, D_{n-m} in una maniera opportuna, cioè facciamo che gli elementi omologhi in essi sieno i due determinanti l'uno contenente $n-m$ colonne di A, e m di B, e l'altro contenente le *rimanenti* m colonne di A e le *rimanenti* $n-m$ colonne di B. Allora si può mostrare che:

Facendo il prodotto per linee dei due determinanti $D_m D_{n-m}$, gli elementi principali del prodotto risultano eguali al prodotto $A \cdot B$, e gli altri elementi risultano zero, il che costituisce un teorema di Sylvester da lui pubblicato sin dal 1851 (op. cit.).

Formiamo la matrice che ha per prime colonne, $n-m$ colonne di A, e per altre colonne tutte quelle di B, e così l'altra matrice che ha per prime colonne le rimanenti m di A, e poi tutte le colonne di B.

Formiamo tutti i determinanti di ordine n contenuti nella prima matrice e contenenti sempre le colonne fisse di A, e così per la seconda matrice.

Possiamo far corrispondere i primi determinanti ai secondi intendendo come corrispondenti quelli che non hanno comune nessuna colonna di B. Allora i determinanti corrispondenti saranno gli elementi omologhi di due linee omologhe in D_m e D_{n-m}. La somma dei prodotti dei determinanti corrispondenti (dando a quelli della seconda matrice il segno negativo se sono di classe dispari) sarà un elemento principale del determinante prodotto D_m D_{n-m}.

Chiamiamo $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ i minori di ordine $n-m$ contenuti nelle $n-m$ colonne di A, e $\alpha_1' \alpha_2' \ldots$ i loro complementi algebrici che saranno i minori di ordine m contenuti nelle altre colonne (col segno negativo se di classe dispari).

Chiamiamo poi con

$$\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots \end{matrix}$$

i minori di ordine m contenuti in B, e

$$\begin{matrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} & \ldots \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \ldots \end{matrix}$$

i loro complementi algebrici (di ordine $n-m$).

Allora l'elemento principale del prodotto $D\,D'$ sarà, per quello che si è detto,

$$\sum_j \left(\sum_i \alpha_i \, \beta_{ji} \sum_k \alpha'_k \, \beta'_{jk} \right) =$$
$$= \sum_{ik} \alpha_i \, \alpha'_k \sum_j \beta_{ji} \, \beta'_{jk}.$$

Per $i = k$ si ha

$$\sum_i \alpha_i \alpha'_i \sum_j \beta_{ji} \beta'_{ji}$$

che è eguale al prodotto $A \cdot B$, e per i diverso da k si ha zero, perchè, per le proprietà di un determinante,

$$\sum_j \beta_{ji} \beta'_{jk} = 0$$

per i diverso da k.

Analogamente si dimostrerebbe che gli elementi *non* principali sono zero.

I due determinanti $D_m D_{n-m}$ qui considerati hanno fra loro relazioni simili a quelle che hanno fra loro i due determinanti formati l'uno coi minori di ordine m, e l'altro con quelli di ordine $n - m$ di un dato.

L'analogia si estende ancora alle relazioni fra i loro *minori*. Si può dimostrare il seguente teorema (di Picquet).

Un minore di D_{n-m} è eguale al complemento del suo omologo in D_m, moltiplicato per una potenza di A e una potenza di B.

La dimostrazione di questo teorema la possiamo fare nel seguente modo semplicissimo.

Sieno d_{ij} gli elementi di D_m, e d_{ij}' quelli di D_{n-m}.

Consideriamo, per fissare le idee, il primo minore principale di ordine r di D_m, che potremo scrivere (ponendo $\binom{n}{m} = t$)

$$\begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} & d_{1r+1} & \dots & d_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & \dots & d_{rr} & d_{rr+1} & \dots & d_{rt} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Il prodotto di questo per D_{n-m}, per effetto del teorema ultimo dimostrato, dà

$$\begin{vmatrix} AB & 0 & \dots & 0 & d'_{1,r+1} & \dots & d'_{1t} \\ 0 & AB & \dots & 0 & d'_{2,r+1} & \dots & d'_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & AB & d'_{r,r+1} & \dots & d'_{rt} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d'_{r+1,r+1} & \dots & d'_{r+1,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d'_{t,r+1} & \dots & d'_{tt} \end{vmatrix}$$

cioè

$$\begin{vmatrix} d'_{r+1,r+1} & \dots & d'_{r+1,t} \\ \dots & \dots & \dots \\ d'_{t,r+1} & \dots & d'_{tt} \end{vmatrix} A^r B^r$$

e, sapendo che D_{n-m} è poi a sua volta eguale ad una potenza di A per una potenza di B, il teorema resta dimostrato. Propriamente si trova che il *minore* di ordine r di D_m, è eguale al comple-

mento del suo analogo in D_{n-m} moltiplicato per

$$A^{r-\binom{n-1}{m-1}} \; B^{r-\binom{n-1}{m}}.$$

Terminiamo queste considerazioni coll'osservare che, se in particolare il secondo determinante B lo si suppone eguale a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 1$$

allora i teoremi di questo paragrafo danno quelli del paragrafo precedente, e i determinanti D_m D_{n-m} di questo paragrafo diventano quelli ai minori di ordine m, e $n-m$ del determinante A, che nel paragrafo precedente abbiamo indicati cogli stessi simboli.

Al gruppo di considerazioni riguardanti i determinanti formati cogli elementi di due altri si riattacca ancora un lavoro di Siacci da noi già citato. (Annali di matematica, Vol. V, p. 296; Acc. di Torino 1872.)

Si abbiano due determinanti

$$A = |a_{rs}|$$
$$B = |b_{rs}|$$

e si formi il determinante P il cui elemento generale sia

$$\lambda \, a_{rs} + \mu \, b_{rs}.$$

Il primo dei teoremi del Siacci dice che:

Il determinante P è eguale al prodotto dei due determinanti A, B, per il determinante il cui elemento generale è

$$\mu\, A_{rs} + \lambda\, B_{rs}$$

dove A_{rs}, B_{rs} sono i complementi degli elementi a_{rs}, b_{rs} in A, B.

Non entreremo nei dettagli di questo e di altri teoremi, e ci basti solo di averne fatto un cenno.

Per l'argomento di questo paragrafo vedi anche: Pascal, *Sulle varie forme delle relazioni esistenti fra i determinanti di una matrice rettangolare.* (Annali di mat. 1896.)

§ 29. — Relazioni fra i determinanti contenuti in una matrice. Ricerca di Vahlen.

Sia data una matrice di m linee e n colonne.

Cogli elementi contenuti in essa si possono formare $\binom{n}{m}$ determinanti di ordine m. Si domanda: quanti di questi sono indipendenti? Cioè, quante relazioni, fra loro indipendenti, esistono fra essi?

Sieno a_{rs} gli elementi della matrice

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{.2} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}. \end{matrix}$$

Incominciamo coll' osservare che una relazione identica fra i determinanti di ordine m contenuti in questa matrice potrà sempre spezzarsi in parti ognuna delle quali deve essere *omogenea* in tali determinanti, ciascuno dei quali è omogeneo di grado n negli elementi a, e ciascuna di tali parti eguagliata a zero costituirà da sè una relazione identica.

Dunque tutte le relazioni richieste potranno sempre ridursi ad essere omogenee negli $\binom{n}{m}$ determinanti.

Inoltre se ogni elemento a_{rs} lo trasformiamo colla sostituzione lineare

$$a_{rs} = \sum_{h=1}^{m} \alpha_{hr} \, a'_{hr}$$

allora ogni determinante contenuto nella matrice delle a è eguale all' analogo contenuto in quella delle a' moltiplicato per il determinante delle α, e quindi le relazioni omogenee fra essi restano inalterate, e non vengono a contenere le quantità α.

Intanto noi possiamo disporre delle m^2 quantità arbitrarie α in modo che altrettanti degli elementi a' acquistino dei valori fissi. Allora gli $\binom{n}{m} - 1$ rapporti di determinanti restano funzioni solo di $n\,m - m^2 = m\,(n - m)$ elementi arbitrari e quindi si vede che *al più* non potranno esistere che

$$\binom{n}{m} - 1 - m\,(n - m)$$

relazioni fra essi rapporti, il che equivale ad altrettante relazioni *omogenee* fra i determinanti stessi.

Faremo ora vedere che effettivamente si possono formare altrettante relazioni *tutte fra loro indipendenti.*

Consideriamo il determinante D formato colle prime m colonne, e prendiamone il reciproco i cui elementi li chiameremo A_{rs}.

Consideriamo poi un determinante qualunque Δ formato colle colonne di ordini

$$r_1\ r_2\ \ldots\ r_m.$$

Formiamo il prodotto per *colonne* dei due determinanti.

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} & a_{1r_2} & \ldots & a_{1r_m} \\ a_{2r_1} & a_{2r_2} & \ldots & a_{2r_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mr_1} & a_{mr_2} & \ldots & a_{mr_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{vmatrix}.$$

Un elemento qualunque di posto $i\,s$ del determinante prodotto è:

$$a_{1r_i} A_{1s} + a_{2r_i} A_{2s} + \ldots + a_{mr_i} A_{ms}$$

che non è altro che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

quando in luogo della colonna s^{ma} si sostituisce la colonna r_i^{ma} della matrice data.

Il risultato del prodotto è dunque il determinante i cui elementi sono a loro volta i determinanti ricavati da D sostituendo in luogo delle sue colonne, quelle di ordini $r_1 r_2 \dots r_m$.

Sapendo poi che il determinante delle A è eguale a sua volta alla potenza $m-1^{ma}$ di D, si vede che ognuna delle costruite equazioni può rappresentare una relazione fra i determinanti della matrice.

Esaminiamo intanto queste relazioni.

Se Δ è la stessa cosa del determinante D, allora evidentemente si ha un' identità.

Consideriamo poi tutti i Δ che hanno $m-1$ colonne scelte fra quelle di D, e una sola scelta fra le $n-m$ restanti della matrice data; tali Δ sono evidentemente in numero di $m(n-m)$. Ora essi danno luogo a delle relazioni identiche, perchè il determinante che allora risulta al secondo membro è

$$\begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix}$$

che è eguale a $D^{n-1}\Delta$.

Le altre relazioni che si hanno facendo variare Δ in tutti gli altri modi possibili in numero di

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n-m)$$

sono certamente tutte fra loro indipendenti, perchè al primo membro in ciascuna di esse compare un fattore (che è Δ) il quale varia dall' una all' altra delle relazioni, e non compare mai al secondo membro. Infatti il secondo membro è in ogni caso formato mediante determinanti che si ricavano dal fondamentale D mutando *una sola colonna*, mentre che il Δ, che compare al primo membro, è sempre un determinante contenente *almeno* due colonne diverse da quelle di D, giacchè in caso diverso si hanno relazioni identiche.

Resta così dimostrato che *fra gli* $\binom{n}{m}$ *determinanti di ordine m di una matrice con n colonne e m linee esistono*

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n-m)$$

relazioni indipendenti.

Questa dimostrazione è contenuta in una nota recente di VAHLEN. (*Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix*, Crelle. Vol. CXII, pagina 306, 1893.)

§ 30. — FORMOLA DI NETTO E SUA ANALOGA.

È interessante notare di qual grado sono le relazioni trovate nel paragrafo precedente.

Supponiamo prima che *due soli* degli indici

$$r_1 \; r_2 \; \ldots \; r_m$$

sieno diversi dagli indici

$$1\ 2\ \ldots\ m$$

Sieno p. es., gli indici r, s che saranno scelti fra

$$m+1,\ m+2,\ \ldots\ n$$

Le colonne con tali indici sieno da collocarsi al posto di indici i, e j.

Allora al secondo membro la prima linea verrà col primo elemento eguale a D e cogli altri tutti zero; la seconda linea col secondo elemento eguale a D e gli altri zero e così tutte le altre linee, meno la linea i^{ma} e la linea j^{ma} nella quale compariranno ordinatamente i determinanti

$$\begin{array}{llll}(r\,2\ \ldots\ m) & (1\,r\,3\ \ldots\ m) & \ldots & (1\,2\ \ldots\ r) \\ (s\,2\ \ldots\ m) & (1\,s\,3\ \ldots\ m) & \ldots & (1\,2\ \ldots\ s).\end{array}$$

indicando col simbolo

$$(r\ 2\ \ldots\ m)$$

il determinante formato colle colonne di indici

$$r,\ 2,\ \ldots\ m,$$

e così di seguito.

Lo sviluppo del secondo membro (poichè gli elementi D stanno tutti sulla diagonale principale) verrà dunque eguale a

$$D^{m-2} = \begin{vmatrix} (1,2\ldots\, i-1, r, i+1\ldots\, m) & (1,2\ldots\, j-1, r, j+1\ldots\, m) \\ (1,2\ldots\, i-1, s, i+1\ldots\, m) & (1,2\ldots\, j-1, s, j+1\ldots\, m) \end{vmatrix}.$$

Quindi paragonando col primo membro e sopprimendo il fattore comune D_{m-2} si ha una relazione di 2.° grado nei determinanti. Di tali se ne hanno $\binom{n-m}{2}\binom{n}{2}$. Analogamente se ne avranno $\binom{n-m}{3}\binom{n}{3}$ di 3.° grado, e così di seguito.

Continuando a rappresentare i determinanti col simbolo ora introdotto la relazione trovata è la seguente

$$(1,2,\dots i-1,r,i+1,\dots j-1,s,j+1,\dots m)\,(1,2,\dots m)=$$
$$(1,2,\dots i-1,r,i+1,\dots m)\,(1,2,\dots j-1,s,j+1,\dots m)-$$
$$-(1,2,\dots i-1,s,i+1,\dots m)\,(1,2,\dots j-1,r,j+1,\dots m).$$

Ora lasciamo inalterati i valori degli indici r, s, ma mutiamo il posto in cui li sostituiamo; cioè immaginiamo che la colonna r^{ma} non la sostituiamo più al posto i^{mo} ma al posto h^{mo}. Allora si ha l'altra relazione

$$(1,2,\dots h-1,r,h+1,\dots j-1,s,j+1,\dots m)\,(1,2,\dots m)=$$
$$=(1,2,\dots h-1,r,h+1,\dots m)\,(1,2,\dots j-1,s,j+1,\dots m)-$$
$$-(1,2,\dots h-1,s,h+1,\dots m)\,(1,2,\dots j-1,r,j+1,\dots m).$$

e così si avrebbe un'altra relazione mutando poi h in k.

Ora queste tre relazioni contengono tutte i medesimi coefficienti

$$(1,2,\dots m)$$
$$(1,2,\dots j-1,s,j+1,\dots m)$$
$$(1,2,\dots j-1,r,j+1,\dots m).$$

Considerando il determinante di 3.° ordine formato colle nove altre quantità che entrano in queste tre relazioni tal determinante deve essere zero, come noi faremo vedere in generale quando tratteremo della teoria delle equazioni lineari, e come del resto si potrebbe anche qui vedere subito, moltiplicando le tre equazioni per i complementi algebrici degli elementi della prima colonna nel detto determinante e sommandole.

Considerando la matrice delle prime m colonne e delle due altre la r^{ma} e la s^{ma}, e indicando più semplicemente con

$$\Delta_{\alpha\beta}$$

il determinante contenuto in tale matrice sopprimendovi le colonne α^{me} e β^{me}, abbiamo dunque che il determinante

$$\begin{vmatrix} \Delta_{ij} & \Delta_{is} & \Delta_{ir} \\ \Delta_{hj} & \Delta_{hs} & \Delta_{hr} \\ \Delta_{kj} & \Delta_{ks} & \Delta_{kr} \end{vmatrix}$$

deve essere identicamente zero.

Questo è il risultato contenuto in principio di una nota di NETTO, *Zwei Determinantensätze*. Acta math., vol. XVII, p. 199. 1893.

Questo risultato potrebbe essere facilmente generalizzato.

È importante notare che col metodo da noi seguito si può trovare un risultato diverso da quello qui ottenuto, ma che ha con esso grande affinità.

Se nella relazione di 2.° grado da cui siamo par-

titi, in luogo di mutare l'indice i, mutiamo r in h, e k, e poi seguiamo lo stesso procedimento, otteniamo un determinante di 3.° ordine diverso da quello ora scritto.

Considerando la matrice delle prime m colonne e poi delle colonne $s\,r\,h\,k$, e indicando con $\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ il minore ottenuto da tale matrice sopprimendo le colonne $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, si ha

$$\begin{vmatrix} \Delta_{ijhk} & \Delta_{ishk} & \Delta_{jshk} \\ \Delta_{ijkr} & \Delta_{iskr} & \Delta_{jskr} \\ \Delta_{ijrh} & \Delta_{isrh} & \Delta_{jsrh} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione può mettersi sotto una forma che mostra maggiormente la sua analogia colla formola già citata di Netto. Consideriamo la matrice formata da tutte le colonne considerate, *meno le sei colonne* di indici i, j, s, r, h, k. Indicando con $\Delta_{\alpha\beta}$ il determinante formato *aggiungendo* alle $m-2$ colonne di questa matrice, le colonne α, β, il determinante precedente assume esattamente la medesima forma del determinante di Netto, salvo che gli elementi hanno un significato diverso. Mentre nel determinante di Netto gli elementi sono i minori ottenuti da una matrice di $m+2$ colonne *sopprimendo due colonne*; in questo determinante gli elementi sono i minori ottenuti da una matrice di $m-2$ colonne *aggiungendo due colonne*.

Per l'argomento di questo paragrafo, vedi Pascal, *Annali di matem.* 1896.

§ 31. — Forma ridotta delle relazioni fra i determinanti di una matrice.

A questi studi sulle relazioni fra i determinanti di una matrice si riattaccano quelli che capitano nello studio del calcolo simbolico delle forme algebriche di specie n.

Le relazioni trovate sono alcune di 2.° grado nei determinanti, altre di 3.° grado, ecc.

Ora è importante notare che esse possono ridursi tutte a relazioni di un tipo unico di 2.° grado nei determinanti. La relazione che si ottiene così, si suol chiamare, nella teoria del calcolo simbolico delle forme algebriche, una *identità fondamentale.* (Vedi la Memoria: Pascal, *Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche.* Memorie dei Lincei. Vol. V, serie IV, p. 374. 1888.)

Indichiamo, come avanti, con $(i_1\, i_2 \ldots i_m)$ il determinante formato colle colonne di indici $i_1\, i_2 \ldots i_m$.

La relazione generale trovata nelle pagine precedenti può scriversi sotto la seguente forma:

$$(i_1 \ldots i_m)(12 \ldots m)^{m-1} = \begin{vmatrix} (i_1\, 2 \ldots m)(1 i_1\, 3 \ldots m) \ldots (12 \ldots i_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (i_m 2 \ldots m)(1 i_m 3 \ldots m) \ldots (12 \ldots i_m) \end{vmatrix} \qquad (a$$

Ora faremo vedere che tutte le relazioni di

questo tipo restano verificate mediante certe altre relazioni di 2.° grado che si ottengono nel seguente modo.

Consideriamo il determinante di ordine $m+1$ formato nel seguente modo: Scegliamo nella matrice data le colonne di ordini $i_1 i_2 \ldots i_m i_{m+1}$, e formiamo con queste la matrice con m linee e $m+1$ colonne; nell'ultima linea poi poniamo i determinanti del tipo:

$$\begin{array}{l} (i_1 \quad j_1 \, j_2 \, \ldots \, j_{m-1}) \\ (i_2 \quad j_1 \, j_2 \, \ldots \, j_{m-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (i_{m+1} \, j_1 \, j_2 \, \ldots \, j_{m-1}) \end{array}$$

dove gli indici $j_1 j_2 \ldots j_{m-1}$ corrispondono a quelli di altre $m-1$ colonne scelte nella matrice data (in particolare alcune delle j potrebbero essere eguali ad alcune delle i già considerate) Il determinante così formato è identicamente zero, perchè è evidente che gli elementi dell'ultima linea sono una medesima combinazione lineare degli elementi corrispondenti delle linee parallele.

Sviluppando quel determinante secondo gli elementi dell'ultima linea si ha dunque

$$\Sigma \pm (i_1 \, i_2 \, \ldots \, i_m) \, (i_{m+1} j_1 j_2 \, \ldots \, j_{m-1}) = 0 \quad (b$$

dove il sommatorio si estende a tutte le permutazioni circolari fra gli indici $i_1 i_2 \ldots i_m i_{m+1}$, e i segni dei vari termini sono alternati o no secondochè m è dispari o pari.

Per intenderci più facilmente chiameremo ele-

menti *circolanti* gli elementi $i_1 \dots i_m\, i_{m+1}$, e elementi *fissi* gli altri. Se *tutti* gli elementi fissi sono diversi dagli elementi *circolanti* la formola (b) contiene $m + 1$ termini. Se r elementi fissi sono eguali ad altrettanti elementi circolanti allora r termini della formola generale si distruggono, e quindi restano solo $m - r + 1$ termini.

È curioso che Fürstenau (*Beiträge zur Theorie der Determinanten*; *Crelle*, LXXXIX, p. 86.) ha creduto necessario una dimostrazione piuttosto lunga per dimostrare questa identità particolare, pure prendendo le mosse dalla identità generale.

Ora è con questa identità fondamentale di 2.° grado che si possono costruire tutte le identità precedentemente stabilite; si può cioè mostrare che da questa tutte le altre dipendono.

Supponiamo che in particolare

$$j_2\ j_3\ \dots\ j_{m-1}$$

sieno eguali a

$$i_1\ i_2\ \dots\ i_{m\ 2}.$$

Allora $m - 2$ termini della (b) vanno a zero, perchè vengono a contenere dei determinanti con due colonne eguali; restano solo tre termini cioè

$$\begin{aligned}&(i_1\ i_2 \dots\ i_{m-2}\ i_{m-1}\ i_m)\ \ (i_{m+1}\ j_1\ i_1 \dots\ i_{m-2}) + \\ +\ &(i_1\ i_2 \dots\ i_{m-2}\ i_m\ \ i_{m+1})\ (i_{m-1}\ j_1\ i_1 \dots\ i_{m\ 2}) + \\ +\ &(i_1\ i_2 \dots\ i_{m-2}\ i_{m+1}\ i_{m-1})\ (i_m\ \ j_1\ i_1 \dots\ i_{m-2}) = 0.\end{aligned}$$

Ponendo in particolare $i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2 \dots m$ si hanno relazioni (mutando gli indici $i_{m+1}\, j_1$ in tutti i modi possibili), che non sono altro che le

relazioni di 2.° grado che si ottengono dalla formola generale (a). Infatti si è visto avanti che da (a) si ottengono le relazioni di 2.° grado, quando solo due degli indici $i_1 i_2 \ldots i_m$ sono diversi dagli indici $1, 2, \ldots m$; e allora al secondo membro si ottiene per fattore comune $(1, 2, \ldots)^{m-2}$, e soppresso questo fattore si hanno precisamente relazioni del tipo precedente. Passiamo alle relazioni di 3.° grado. Esse si ottengono da (a) quando tre degli indici $i_1 i_2 \ldots i_m$ sono diversi da $1, 2, \ldots m$.

Una di esse è per es.:

$$(1, 2, \ldots i_{m-2}\ i_{m-1}\ i_m)\ (1, 2, \ldots m)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} (1,2,\ldots i_{m-2}, m-1, m) & (1,2,\ldots m-2, i_{m-2}, m) & (1,2,\ldots m-2, m-1, i_{m-2}) \\ (1,2,\ldots i_{m-1}, m-1, m) & (1,2,\ldots m-2, i_{m-1}, m) & (1,2,\ldots m-2, m-1, i_{m-1}) \\ (1,2,\ldots i_m\ , m-1, m) & (1,2,\ldots m-2, i_m\ , m) & (1\ 2,\ldots m-2, m-1, i_m\ ) \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo questo determinante secondo gli elementi dell'ultima colonna, e teniamo conto di relazioni analoghe all'ultima scritta.

I minori di 2.° ordine compresi nelle due prime colonne di questo determinante sono rispettivamente eguali a:

$$+ (1, 2, \ldots i_{m-2}\ i_{m-1}\ m)\ (1, 2, \ldots m),$$
$$- (1, 2, \ldots i_{m-2}\ i_m\ \ m)\ (1, 2, \ldots m),$$
$$+ (1, 2, \ldots i_{m-1}\ i_m\ \ m)\ (1, 2, \ldots m),$$

e quindi sopprimendo il fattore comune $(1, 2, \ldots m)$ resta la relazione:

$$(1, 2, \ldots i_{m-2}\, i_{m-1}\, i_m)\ (1, 2, \ldots m-2, m-1, m\ \ ) -$$
$$- (1, 2, \ldots i_{m-2}\, i_{m-1}\, m)\ (1, 2, \ldots m-2, m-1, i_m\ \ ) +$$
$$+ (1, 2, \ldots i_{m-2}\, i_m\ \ m)\ (1, 2, \ldots m-2, m-1, i_{m-1}) -$$
$$- (1, 2, \ldots i_{m-1}\, i_m\ \ m)\ (1, 2, \ldots m-2, m-1, i_{m-2}) = 0$$

che si ricava da (b) ponendo

$$j_1 = 1, \; j_2 = 2, \ldots \; j_{m-1} = m - 1$$

e

$$i_1 = 1, \ldots \; i_{m-3} = m - 3, \; i_{m+1} = m.$$

Così si potrebbe dimostrare che lo stesso succede per le relazioni di 4.° grado comprese nella formola (a), e *in generale tutte le formole del tipo* (a) *sono sempre riducibili a formole del tipo* (b), *alle quali restano in fine ridotte tutte le relazioni esistenti fra i minori di una matrice rettangolare.*

Uno studio su moltissime identità ricavate da quelle di tipo (b) si trova in Hunyady, *Ueber einige Determinanten-Gleichungen*, Crelle, V. XCIV, p. 171, 1882.

§ 32. — Relazioni fra i determinanti formati cogli stessi elementi.

Una ricerca affine a quella del paragrafo precedente è quella contenuta in questo paragrafo.

Cogli stessi n^2 elementi dati possiamo formare $n^2!$ determinanti di ordine n. Fra questi alcuni sono tutti eguali fra loro in valore assoluto, quelli cioè che risultano l'uno dall'altro scambiando le linee fra loro o le colonne fra loro.

Tratteremo qui di teoremi trovati da Bagnera (*Sopra i determinanti che si possono for-*

mare cogli stessi n^2 elementi. Giorn. di Batt. Volume XXV, p. 228. 1886) e da me (*Istit. Lomb.*, 1896), riguardanti relazioni esistenti fra determinanti diversi ma formati cogli stessi elementi.

Si abbia il determinante di ordine n cogli elementi a_{ij}. Permutando in tutti i modi possibili gli elementi della i^{ma} linea si hanno $n!$ determinanti diversi. Sia Δ uno di essi, e sia Δ_{jk} quello ottenuto da Δ scambiando fra loro due elementi della linea i^{ma} p. es. a_{ij} con a_{ik}. Si può esprimere facilmente la differenza di Δ con Δ_{jk}. Infatti basta osservare che sviluppando Δ secondo gli elementi della i^{ma} linea si ha

$$\Delta = \Omega + a_{ij} A_{ij} + a_{ik} A_{ik}$$

chiamando A_{ij} A_{ik} i complementi algebrici degli elementi della linea i^{ma}, e indicando con Ω l'assieme di tutti gli altri termini.

Si ha allora

$$\Delta_{jk} = \Omega + a_{ik} A_{ij} + a_{ij} A_{ik}$$

donde

$$\Delta - \Delta_{jk} = (a_{ij} - a_{ik})\ (A_{ij} - A_{ik}).$$

Facendo variare $j\,k$ in tutti gli $\binom{n}{2}$ modi possibili e moltiplicando si ha

$$\prod_{j,k} (\Delta - \Delta_{jk}) = \prod_{j,k} (a_{ij} - a_{ik}) \prod_{j,k} (A_{ij}\ A_{ik})$$

dove il simbolo Π si estende evidentemente a $\binom{n}{2}$ fattori.

Ora se invece di prendere le mosse da Δ, prendiamo le mosse da un altro degli $n!$ determinanti ottenuto da Δ con una qualunque permutazione degli elementi della linea i^{ma}, p. es. da D, otteniamo

$$\Pi(D - D_{jk})$$

espresso nella analoga maniera, cioè, a meno del segno, abbiamo la eguaglianza dei due primi membri

$$\prod_{j,k} (\Delta - \Delta_{jk}) = \pm \prod_{j,k} (D - D_{jk}).$$

Abbiamo così il teorema:

Formiamo gli $n!$ determinanti permutando fra loro in tutti i modi possibili gli n elementi di una linea qualunque in un determinante dato; sceglia-mo uno di questi, e formiamo tutte le $\binom{n}{2}$ differenze fra esso e quelli che da esso si ottengono colla permutazione di due soli elementi; il prodotto di tutte queste differenze è costante qualunque sia il determinante scelto da principio.

Un altro teorema trovato dallo stesso autore è il seguente:

Formiamo gli $n!$ determinanti permutando in tutti i modi gli n elementi di una linea in un dato determinante; scegliamone $n + 1$ di essi, e in ciascuno di questi facciamo fra gli elementi di quella linea, n permutazioni simili; il determinante di ordine $n + 1$ formato con tali determinanti è zero.

Indichiamo con $A_{i1} A_{i2} \ldots A_{in}$ i complementi algebrici degli elementi della linea i^{ma}.

Gli elementi $a_{i1} \ldots a_{in}$ della linea i^{ma} li assoggettiamo a $n+1$ sostituzioni; abbiamo così $n+1$ permutazioni di tali elementi. Tali permutazioni sieno indicate con $P_{11}\ P_{12} \ldots P_{1,n+1}$ ad ognuna delle quali corrisponderà un determinante $\Delta_{P_{1i}}$.

Operando sulle P, delle sostituzioni simili abbiamo altre $n+1$ permutazioni che si possono indicare con P_{2i}, e così di seguito.

Sieno

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+1,2} & \ldots & \alpha_{n+1,n} \end{array}$$

gli elementi $a_{i1} \ldots a_{in}$ permutati secondo le permutazioni $P_{11} \ldots P_{1n+1}$.

Il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & \Delta_{P_{11}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n+1,1} & \ldots & \alpha_{n+1,n} & \Delta_{P_{1}n+1} \end{vmatrix}$$

è zero perchè gli elementi dell'ultima colonna sono le medesime combinazioni lineari degli elementi delle altre colonne.

Se consideriamo similmente

$$\Delta_{P_{21}} \ \ldots \ \Delta_{P_{2,n+1}}$$

abbiamo un simile determinante dove le prime n colonne salvo nell'ordine sono le stesse, perchè da queste si ricavano con una permutazione simile fatta poi sui primi n elementi delle linee.

Chiamando dunque

$$\lambda_1 \; \lambda_2 \; . \; . \; . \; \lambda_{n+1}$$

i complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna nel determinante precedente, abbiamo le relazioni identiche

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \, \varDelta P_{11} \quad + \; . \; . \; . \; + \; \lambda_{n+1} \, \varDelta P_{1,n+1} \quad = 0 \\ \lambda_1 \, \varDelta P_{21} \quad + \; . \; . \; . \; + \; \lambda_{n+1} \, \varDelta P_{2,n+1} \quad = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 \, \varDelta P_{n+1,1} \; + \; . \; . \; . \; + \; \lambda_{n+1} \, \varDelta P_{n+1,n+1} = 0 \end{array}$$

le quali relazioni mostrano che *il determinante delle* Δ *è identicamente zero*, perchè gli elementi di una colonna sono le medesime combinazioni lineari di quelli delle colonne parallele.

Questi due teoremi danno due tipi di relazioni fra i determinanti ottenuti permutando in tutti i modi possibili gli elementi di una linea in un determinante dato.

Ma possiamo trovare dei tipi di relazioni di forma più generale. Consideriamo la matrice delle prime $n-2$ colonne. Sieno poi $\alpha \, \alpha' \, \alpha''$ tre colonne che si ricavano dalla $n-1^{ma}$ permutando gli elementi in tre maniere diverse, e sieno $\beta \, \beta' \, \beta''$ tre colonne ricavate dalla n^{ma} permutando gli elementi in tre altre maniere diverse.

Indicando con $\Delta_{\alpha\beta}$ il determinante ottenuto riunendo alle prime $n-2$ colonne fisse le colonne α, β, si ha la relazione nota (v. § 30).

$$\begin{vmatrix} \Delta_{\alpha\beta} & \Delta_{\alpha\beta'} & \Delta_{\alpha\beta''} \\ \Delta_{\alpha'\beta} & \Delta_{\alpha'\beta'} & \Delta_{\alpha'\beta''} \\ \Delta_{\alpha''\beta} & \Delta_{\alpha''\beta'} & \Delta_{\alpha''\beta''} \end{vmatrix} = 0$$

che rappresenta una relazione fra i determinanti ottenuti da un dato scambiando fra loro gli elementi di una colonna, e fra loro gli elementi di un'altra colonna.

Si potrebbero così ricavare altre relazioni fra i determinanti ottenuti scambiando gli elementi di tre colonne. Da siffatte relazioni come caso particolare si ricava la relazione di grado $n+1$ fra i $\Delta_{P_{ij}}$ avanti ottenuta. Non ci fermeremo sui dettagli di tali considerazioni. V. PASCAL, *Rendiconti Istituto Lombardo*. 1896.

§ 33. — CALCOLO DI DETERMINANTI ED ELEMENTI SPECIALI. DETERMINANTE DI VANDERMONDE O DI CAUCHY E SUA GENERALIZZAZIONE.

Consideriamo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Evidentemente esso sviluppato dà luogo ad una espressione razionale intera nelle a. Per $a_i = a_j$ esso acquista due linee identiche, e quindi si annulla; dunque è divisibile per $a_i - a_j$. Potendo

i, j variare ciascuno in n modi si hanno in tutto $\frac{n \cdot n-1}{2}$ possibili differenze per ciascuna delle quali è sempre divisibile il determinante. Si ha dunque che D conterrà per fattore il prodotto

$$\begin{array}{r} (a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3)\ldots(a_1 \quad - a_n) \\ (a_2 - a_3)\ldots(a_2 \quad - a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{n-1} - a_n). \end{array}$$

È facile vedere che l'altro fattore non può che essere una costante, perchè questo prodotto in ciascuna delle a è di grado $n-1$; ora lo sviluppo del determinante è appunto di tal grado in ciascuna delle a.

Per calcolare questa costante basta guardare il coefficiente del termine formato dagli elementi della diagonale principale

$$a_2 \; a_3^2 \; a_4^3 \; . \; . \; . \; a_n{}^{n-1}.$$

Questo termine si ottiene dal prodotto soprascritto moltiplicando fra loro i secondi termini di ciascun binomio. Si ha allora lo stesso termine col coefficiente

$$(-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} = (-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}$$

dunque

$$D = (-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}} \prod_{i,j}^{1,n} (a_i - a_j), \; (i<j)$$

indicando col simbolo Π il prodotto di tutte le differenze fra le a e intendendo che sia sempre $i < j$.

Se le a si suppongono radici di un' equazione algebrica di grado n, il D è la radice quadrata del cosiddetto *discriminante* dell' equazione. Esso si suol chiamare ancora il *determinante delle radici di un'equazione*. Si suol chiamare anche *determinante di Cauchy*, il quale ultimo autore lo considerò in generale, mentre Vandermonde lo avea studiato in un caso speciale, vedi anche JACOBI, *Crelle*, Vol. XXII, p. 360.

Formiamo il quadrato del determinante di Vandermonde. Indicando in generale con s_p la somma delle potenze simili delle a, cioè

$$s_p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p,$$

si ha che tal quadrato è eguale a

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

si ha cioè un determinante di Hankel (v. § 19).

Si può studiare un determinante più generale di quello di Vandermonde nella seguente maniera.

Nel determinante studiato le successive linee hanno per elementi le potenze successive di n quantità $a_1\, a_2 \ldots a_n$.

Formiamo invece un determinante in cui gli elementi delle successive linee sono potenze qualun-

que di n quantità. Un siffatto determinante sarà, per es.:

$$\begin{vmatrix} a_1^{r_1} & a_2^{r_1} & \dots & a_n^{r_1} \\ a_1^{r_2} & a_2^{r_2} & \dots & a_n^{r_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{r_n} & a_2^{r_n} & \dots & a_n^{r_n} \end{vmatrix}.$$

Non ci pare opportuno di entrare minutamente nello studio di questi determinanti; ci limiteremo ad alcuni casi speciali; vogliamo solo notare che essi si esprimono mediante le cosidette *funzioni omogenee complete* di grado r delle n quantità $a_1 \dots a_n$ le quali sono le funzioni ottenute sviluppando la potenza r^{ma} della somma di queste quantità, e sostituendo l'unità ai coefficienti numerici che compariscono in questo sviluppo (queste funzioni furono chiamate funzioni *aleph* da Wronski che ne fece uno studio).

Per la letteratura su questo problema si può vedere:

Borchardt, *Berl. Monatsb.* 1859, p. 378. *Crelle.* Vol. LVII, p. 112; *Abh. der Berl. Akad.* (1860).

Trudi, *Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici di un' equazione* ecc. Giorn. di Batt. Vol. II, p. 152-180 (1864).

Stern, *Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie. Crelle.* Vol LXVI, p. 285.

Rubini, *Su talune formole relative a determinanti.* Giorn. di Batt. Vol. IV, p 187 (1866).

Naegelsbach, *Ueber eine Classe symmetrischen Functionen.* Zweibrücken, 1871; Progr. des. K. Gymn.

NAEGELSBACH, *Archiv. der math. u. Phys.* Volume LIX, p. 149.

FIORE, *Dimostrazione di una trasformazione di determinanti.* Giorn. di Batt. Vol. X, pagina 170 (1872).

GARBIERI, *Nuovo teorema algebrico e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali.* Giorn. di Batt. Vol. XVI (1878).

CROCCHI, *Sopra le funzioni Aleph e il determinante di Cauchy.* Giorn. di Batt. Vol. XVII, pagina 218 (1879).

DEL RE, *Relazione fra due determinanti.* Giorn. di Batt. Vol. XIX, p. 116 (1881).

BESSO, *Accad. dei Lincei* (1882-83).

MARCOLONGO, *Generalizzazione di un teorema sui determinanti.* Giorn. di Batt. Vol. XXV, pagina 298 (1887).

ANGLIN, *Théorèmes sur les déterminants.* Bulletin de la Soc. math. de France. Vol. XV, pagina 120 (1887).

LORIA, *Nota su una classe di determinanti.* Giorn. di Batt. Vol. XXVI, p. 329 (1888).

Gli ultimi due autori ritrovano come nuovi risultati già trovati dagli altri.

Il BORCHARDT, STERN (cit.) e altri si occupano di un'altra specie di generalizzazione del determinante di Cauchy.

Possono poi anche vedersi i trattati di GÜNTHER (2.ª édit., 1877), p. 69, di BALTZER, ecc.

Prima di tutto è chiaro che il determinante più generale sopra indicato è divisibile per il prodotto delle differenze di tutte le a fra loro; quindi ne concludiamo che è divisibile per il determinante D

di Vandermonde. Consideriamo il caso speciale che dal determinante di Vandermonde si tolga una linea (quella colle potenze r^{me} delle a), e vi si sostituisca la linea colle potenze n^{me} delle a.

Si abbia cioè il determinante

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & \ldots & a_n^{r-1} \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \\ a_1^{r+1} & a_2^{r+1} & \ldots & a_n^{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

È evidente che deve essere R divisibile per D, cioè

$$R = D \, . \, Q$$

dove Q deve essere una funzione intera negli elementi.

Indicando con $c_1 \, c_2 \ldots c_n$ le funzioni simmetriche elementari delle n quantità a, cioè i coefficienti coi segni alternati dell'equazione che ha per radici le a, è chiaro che deve essere identicamente

$$a_1^n - c_1 \, a_1^{n-1} + c_2 \, a_1^{n-2} - \ldots + (-1)^n \, c_n = 0$$
$$a_2^n - c_1 \, a_2^{n-1} + c_2 \, a_2^{n-2} - \ldots + (-1)^n \, c_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e quindi sostituendo i valori di $a_1^n\, a_2^n \ldots a_n^n$ che si ricavano di qui nel determinante R, si ha un determinante in cui gli elementi della r^{ma} linea sono polinomii, e che quindi si scinde nella somma di tanti determinanti ad elementi monomii. Tali determinanti sono tutti, meno uno, zero, perchè contengono due linee parallele identiche; non è zero invece il determinante in cui compariscono le r^{me} potenze delle a.

Si ha allora

$$R = (-1)^{n-r-1}\, c_{n-r}\, D.$$

Il quoziente di R per D è dunque c_{n-r} cioè la somma dei prodotti delle a prese ad $n-r$ ad $n-r$.

§ 34. — Determinanti formati coi coefficienti binomiali. Determinante di Zeipel.

È facile vedere che il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \ldots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \ldots & \binom{m+n+1}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \ldots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}$$

è eguale ad 1.

Infatti togliendo da ciascuna colonna la precedente si ha un determinante della medesima forma, ma di ordine inferiore. Dunque questo determinante sarà eguale all'analogo ma di 2.° ordine, cioè a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} \end{vmatrix}$$

il quale è eguale ad 1.

Anche a ± 1 è eguale il determinante formato nella seguente maniera coi coefficienti binomiali

$$\begin{vmatrix} \binom{m+n}{m} & \binom{m+n+1}{m} & \dots & \binom{2m+n}{m} \\ \binom{m+n+1}{m} & \binom{m+n+2}{m} & \dots & \binom{2m+n+1}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{2m+n}{m} & \dots & \dots & \binom{3m+n}{m} \end{vmatrix}.$$

Questo è un determinante della specie di quelli considerati da Hankel, e il suo valore si può trovare coi teoremi che a suo tempo abbiamo sviluppati.

Il determinante di ZEIPEL (*Om Determinanter*, ecc. Lunds Univ. Ars-Skrift för ar 1865; vedi anche GÜNTHER, *Determ.*, 2.ª ediz. p. 80), è

formato nella seguente maniera

$$\Delta = \begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \ldots & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p} & \ldots & \ldots & \binom{m+1}{p+r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{m+r}{p} & \ldots & \ldots & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix} .$$

Osserviamo che gli elementi della prima linea hanno per fattore comune m, e gli elementi della prima colonna hanno per fattore comune $\frac{1}{p}$.

Messi in vista questi fattori, il primo elemento diventa allora $\binom{m-1}{p-1}$. Così possono porsi in vista analoghi fattori comuni agli elementi delle altre linee, e delle altre colonne.

Si ha allora

$$\Delta = \frac{m \,.\, m+1 \ldots m+r}{p \,.\, p+1 \ldots p+r} \begin{vmatrix} \binom{m-1}{p-1} & \cdots & \binom{m-1}{p+r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{m+r-1}{p-1} & \cdots & \binom{m+r-1}{p+r-1} \end{vmatrix}$$

e il secondo fattore è un determinante che ha esattamente la stessa forma di quello da cui si è partiti salvo che è mutato m in $m-1$, e p in $p-1$. Continuando collo stesso procedimento e

osservando che

$$\frac{m \cdot m+1 \ldots m+r}{p \cdot p+1 \ldots p+r} = \frac{\binom{m+r}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}}$$

si ha infine

$$\Delta = \frac{\binom{m+r}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}} \frac{\binom{m+r-1}{r+1}}{\binom{p+r-1}{r+1}} \cdots \frac{\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{r+1}{r+1}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \binom{m-p}{o} & \ldots & \binom{m-p}{r} \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ \binom{m-p+r}{o} & \ldots & \binom{m-p+r}{r} \end{vmatrix}.$$

Ora quest'ultimo determinante lo abbiamo sopra considerato e abbiamo visto che è eguale ad 1; dunque Δ resta espresso solo mediante la soprascritta espressione coi coefficienti binomiali.

Su determinanti formati coi coefficienti binomiali, oltre i lavori citati, si può vedere

JANNI, *Nota sullo sviluppo di un determinante.* (Opuscolo separato.)

STERN, *Crelle*, Vol. LXVI, pag. 287-288 (1865).

CALDARERA, *Su talune proprietà dei determinanti, in ispecie di quelli a matrici composte colla serie dei numeri figurati.* Giorn. di Batt. Volume IX, pag. 223 (1871).

BONOLIS, *Sviluppi di alcuni determinanti.* Giorn. di Batt. Vol. XV, pag. 113 (1877).

Lo STERN (cit.) trova, fra le altre, la formola

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{D}{2^{n-2} \,.\, 3^{n-3} \,.\, 4^{n-4} \dots (n-1)^1}$$

dove D è il determinante di Cauchy formato colle quantità $x_1 \; x_2 \dots x_n$ (v. § 33.)

§ 35. — NUMERI DI BERNOULLI E DI EULERO ESPRESSI PER DETERMINANTI.

Per mezzo dei determinanti formati coi coefficienti binomiali si possono esprimere i cosiddetti *numeri di Bernoulli e di Eulero.*

Poniamo

$$\operatorname{tg} x = \sum_1^\infty \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$\sec x = \sum_0^\infty E_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

allora i numeri

$$B_{2m} = \frac{2m}{2^{2m}(2^{2m}-1)} \beta_{2m}$$

ed

$$E_{2m}$$

si chiamano rispettivamente i numeri *Bernoulliani* ed *Euleriani*.

Giovandosi delle formule di ricorrenza esistenti fra tali numeri, si può trovare l'espressione di essi mediante determinanti.

Si trova

$$\beta_{2m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \binom{3}{1} & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \binom{5}{1} & \binom{5}{3} & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{2m-3}{1} & \binom{2m-3}{3} & \dots & 1 & 1 \\ \binom{2m-1}{1} & \binom{2m-1}{3} & \dots & \binom{2m-1}{2m-3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$E_{2m} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \binom{4}{2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{2m-2}{2} & \binom{2m-2}{4} & \dots & \binom{2m-2}{2m-4} & 1 \\ 1 & \binom{2m}{2} & \binom{2m}{4} & \dots & \binom{2m}{2m-4} & \binom{2m}{2m-2} \end{vmatrix}$$

Vedi su questo argomento

SCHERK, *Mathematische Abhandlungen.* Berlin, 1825.

SCHLÖMILCH, *Grünert's Archiv.* Vol. XVI (1850), pag. 411.

STAUDT, *De numeris Bernoullianis.* Erlangen, 1845.

NAEGELSBACH, *Zur independent Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen.* Zeitsch. f. Math. u. Phys. Vol. XIX, pag. 227.

LUCAS, *Annali di matematica.* Serie II, t. VIII, pag. 61.

GÜNTHER, *Determ.* 2.ª ediz. Erlangen, 1877, pagina 101 e seg.

SAALSCHÜTZ, *Vorlesungen über die Bern. Zahlen.* Berlin. Springer, 1893.

HAUSSNER, *Zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.* Nachrichten v. d. K. Ges. Göttingen, 1893, pag. 777.

HAUSSNER, *Independente Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten.* Zeitsch. f. Math. und Phys (1894), pag. 183.

Vedi anche CESÀRO, *Analisi algeb.* 1894, p. 481 e seguenti.

Degli stessi coefficienti si può dare un'espressione mediante determinanti formati coi fattoriali, come noteremo nel paragrafo seguente.

§ 36. — Determinanti formati coi fattoriali.

Il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{\overline{n-1}!} & \frac{1}{\overline{n-2}!} & \ldots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

ha la espressione semplicissima

$$\frac{1}{n!}.$$

Si può vedere su questo:

D'Ovidio, *Due teoremi di determinanti.* Giorn. di Batt. Vol. I, pag. 135 (1863).

Così anche

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots u_0 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \ldots u_1 \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \ldots u_2 \\ 1 & 3 & 3.2 & 3! & \ldots u_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n, & n.\overline{n-1}, & n.\overline{n-1}.\overline{n-2} & \ldots u_n \end{vmatrix} = \Delta^n u_0 . 1! 2! 3! \ldots n!$$

intendendo con $\Delta^n u_0$ la differenza di ordine n delle $n+1$ quantità $u_0\, u_1 \ldots u_n$. (V. JANNI, *Algebra.* Napoli, 1876, pag. 23.)

Mediante determinanti formati coi fattoriali si può dare una rappresentazione dei numeri di Bernoulli e di Eulero di cui abbiamo discorso al paragrafo precedente. Si ha

$$E_{2m} = (2\,m)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2m)!} & \frac{1}{(2m-2)!} & \frac{1}{(2m-4)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

$$B_{2m} = (-1)^{n+1}(2m)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2m+1)!} & \frac{1}{(2m)!} & \frac{1}{(2m-1)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

V. GLAISHER, *Expressions for Laplace's Coëfficients, Bernoullian and Eulerian Numbers etc. as determ.* Messenger of Math., 1876.

§ 37. — Determinanti formati colle radici dell' unità.

Si abbia un *circolante* formato colle radici n^{me} dell'unità (n numero primo). Sia α una radice n^{ma} dell'unità e r una cosiddetta radice *primitiva* del numero n; allora

$$\alpha \quad \alpha^{r} \quad \alpha^{r^2} \ \ldots \ \alpha^{r^{n-1}}$$

sono tutte le n diverse radici dell'unità.

Formiamo il determinante:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^{r} & \ldots & \alpha^{r^{n-2}} \\ \alpha^{r} & \alpha^{r^2} & \ldots & \alpha \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{r^{n-2}} & \alpha & \ldots & \alpha^{r^{n-3}} \end{vmatrix}.$$

Tal determinante è stato studiato da Stern, *Einige Bemerkungen über eine Determ.* Crelle. Vol. LXXIII, pag. 378 e seguenti (1871).

Posto

$$\alpha = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

il valore del determinante A si trova eguale a

$$-\left(\frac{k}{n}\right) n^{\frac{n-2}{2}}$$

se

$$n = 4m + 1$$

ovvero

$$-\left(\frac{k}{n}\right) i\, n^{\frac{n-2}{2}}$$

se

$$n = 4m + 3.$$

Consideriamo ora determinanti formati con tutti elementi 1 e — 1.

Il seguente

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & +1 & +1 & \dots & +1 \\ -1 & -1 & \dots & +1 & +1 & +1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & +1 \end{vmatrix}$$

è un circolante in cui $p < \frac{n}{2}$ elementi della prima linea sono eguali a — 1, e gli altri $n - p$ sono eguali a + 1.

Esso fu studiato da Catalan, *Bulletin de l'Acad. de Belgique*. T. XIII, 2.e partie, p. 534, ed il suo valore è

$$(-1)^{\frac{n.n-3}{2}}\, 2^{n-1}(n - 2p).$$

Supponiamo $p = 1$ e si ha il determinante (ponendo l'ultima linea a secondo posto, l'antipenul-

tima a terzo posto, ecc.).

$$C_n = \begin{vmatrix} -1 & +1 & \dots & +1 \\ +1 & -1 & \dots & +1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & +1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

in cui tutti gli elementi sono eguali ad 1 meno quelli della diagonale principale che sono eguali a — 1.

In una nota di FOURET questo determinante è chiamato C_n (*Sur une mode de transformation des determinants.* Bull. de la Societe math. Volume XIV, p. 146; *Remarque sur certains déterminants numériques.* Bull. ecc. Vol. XV, p. 146), ed è studiato dopo due altri chiamati rispettivamente A_n, B_n.

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} .$$

Il primo ha tutti gli elementi eguali ad 1 salvo gli ultimi $n-1$ della diagonale principale che sono eguali a zero, e il secondo ha tutti gli elementi eguali ad 1, meno tutti quelli della diagonale principale eguali a zero.

In A_n sottraendo dalla prima colonna la seconda si ha

$$A_n = - A_{n-1}$$

donde collo stesso processo si ha infine

$$A_n = (-1)^{n-1}.$$

Nel secondo aggiungendo le altre $n-1$ colonne alla prima si ha

$$B_n = (n-1)\, A_n$$

donde

$$B_n = (n-1)\,(-1)^{n-1}.$$

E finalmente in C_n aggiungendo a tutte le altre colonne la prima si ha

$$C_n = - 2^{n-1}\, B_{n-1}$$

donde

$$C_n = (-1)^{n-1}\, 2^{n-1}\, (n-2).$$

Il determinante C_n può adoperarsi per dimostrare, come ha fatto Fouret, una elegante trasformazione di un determinante.

Si abbia un determinante di ordine $m \geqq n$.

Scegliamo n colonne, e dagli elementi di ciascuna di esse sottragghiamo gli elementi corrispondenti

delle altre. Il nuovo determinante che si viene a formare è eguale al primitivo moltiplicato per $-(n-2)\,2^{n-1}$.

In effetti il nuovo determinante si può considerare come il prodotto del dato per $(-1)^n C_n$ quando a questo si aggiungano convenientemente linee e colonne in modo da ridurlo all'ordine m, cioè quando si ponga

$$(-1)^n C_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Conoscendo il valore di C_n il teorema resta allora dimostrato.

Insieme a questi determinanti si possono considerare questi altri proposti da Roberts (v. Ferrara, *Giorn. di Batt.* Vol. II, pag. 95; Torelli, Idem, p. 191; Smet-Jamar, *Nouv. Ann.* Serie II. T. III, p. 395.)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

che si riducono al C_n precedente quando le α sono tutte eguali a -1.

Il valore di questo determinante è

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) \ldots (\alpha_n - 1) +$$
$$+ \Sigma (\alpha_{i_1} - 1)(\alpha_{i_2} - 1) \ldots (\alpha_{i_{n-1}} - 1)$$

dove $i_1 i_2 \ldots i_{n-1}$ sono, in tutti i modi possibili, $n-1$ indici scelti fra $1, 2, \ldots n$.

Se in luogo degli elementi 1 si pongono elementi eguali ad x, si ha un determinante ancora più generale considerato da Torelli (loc. cit.), (v. anche Cesàro, *Analisi*, p. 16.

Un determinante ancora più generale è il seguente: (Sardi, *Giorn. di Batt.* Vol. VI, p. 357; vedi anche Capelli-Garbieri, *Algebra*, p. 326.)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

il cui valore è

$$(\alpha_1 - x_1)(\alpha_2 - x_2) \ldots (\alpha_n - x_n) +$$
$$+ \Sigma x_{i_n} (\alpha_{i_1} - x_{i_1})(\alpha_{i_2} - x_{i_2}) \ldots (\alpha_{i_{n-1}} - x_{i_{n-1}}).$$

Se le $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sono della forma

$$x_i + (x - A) \quad , \quad A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

si ha allora per risultato

$$x(x - A)^{n-1}.$$

(Vedi Lucas, *Sur une formule d'analyse*, nei Comptes-Rendus, 1870, pag. 1167.)

§ 38. — Un polinomio intero in x espresso sotto forma di determinante.

È facile mostrare che il determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

rappresenta il polinomio

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

V. Günther, *Ueber aufsteigende Kettenbrücke.* Zeits. f. Math. u. Phys. Vol. XXI, pag. 187; *Determ.*, pag. 204.

Laisant, *Sur un déterminant remarquable.* (Bull. de la Société math. Vol. XVII, pag. 104 (1889).

In effetti sviluppando quel determinante secondo

gli elementi della prima colonna si ha

$$a_0 x^n + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & a_n \\ -1 & x & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

dove il secondo determinante è della stessa forma di quello da cui si è partiti, ma è di ordine minore. Così continuando resta dimostrato l'assunto.

Allo stesso risultato, anche più facilmente, si giunge sviluppando il determinante secondo gli elementi della prima linea.

Se in luogo degli elementi -1 si pongono elementi $-y$ si ha una forma binaria in x e y.

Un determinante di questa forma è quello considerato da MANSION (*Deter*. p. 19.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ o & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Tal determinante si ottiene dal precedente ponendo $x = -1$, moltiplicandolo per $(-1)^{n-1}$, e ponendo alcune delle prime a eguali ad 1 e le altre eguali a zero.

Si trova allora che il valore di tal determinante è zero ovvero 1, perchè è

$$1 . (-1)^n + 1 (-1)^{n-1} + \dots ,$$

Di un determinante di forma assai simile, ma più generale, si occupa Escherich (*Bestimmung einer Determinante.* Monatsh. III, p. 19, 1892.)

In luogo degli x nella diagonale principale poniamo ordinatamente $x_1 x_2 \ldots x_n$, e in luogo dei -1 poniamo ordinatamente $-y_1, -y_2, \ldots -y_n$, e si ha allora il determinante considerato da Escherich:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ -y_1 & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & -y_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n \end{vmatrix}.$$

Questo determinante è eguale a

$$a_0 x_1 \ldots x_n + a_1 y_1 x_2 \ldots x_n + a_2 y_1 y_2 x_3 \ldots x_n + \ldots$$

§ 39. — Le potenze simili delle radici sotto forma di determinanti.

Abbiasi l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0;$$

si sa che chiamando $s_1 s_2 \ldots s_m$ $(m \leqq n)$ le somme delle potenze simili delle radici di quell'equazione, sussistono le relazioni (dette di Newton)

$$\begin{aligned} &a_0 s_1 - a_1 = 0 \\ &a_0 s_2 + a_1 s_1 - 2 a_2 = 0 \\ &a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 - 3 a_3 = 0. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Consideriamo ora il determinante

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & -2a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & -3a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-2} & a_{m-3} & a_{m-4} & \ldots & a_0 & -(m-1)\,a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \ldots & a_1 & -m\,a_m \end{array}\right| .$$

Se moltiplichiamo la prima colonna per s_1, la seconda per $s_2, \ldots$ l'$(m-1)^{ma}$ per s_{m-1} e sommiamo alla colonna m^{ma}, i primi $m-1$ elementi di questa, per effetto della formola di Newton, diventano zero e l'ultimo elemento diventa $-a_0\,s_m$; lo sviluppo del determinante allora si riduce al prodotto degli elementi principali, perchè sono zero tutti gli elementi da una stessa parte della diagonale principale; si ha così per valore di quel determinante

$$-a_0^m\,s_m$$

e, a meno del fattore a_0^m si ha quindi sotto forma di determinante, la somma s_m delle m^{me} potenze delle n radici dell'equazione $(m \leqq n)$.

Per qualche considerazione su determinanti di questa forma si può vedere

VITO EUGENIO, *Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari*. Giorn. di Batt. Volume VIII, pag 285 (1870).

GÜNTHER, *Determ.*, pag. 110.

JANNI, *Sopra una formola di Waring.* Accad. di Napoli, 1878.

GARBIERI, *Bollettino di scienze mat.* Vol. XI, 1878.

§ 40. — DETERMINANTI INDIPENDENTI DAI VALORI DI CERTI ELEMENTI.

È notevole il seguente determinante considerato da DOSTOR, (*Archiv. d. Math.* Vol. 56, p. 239.)

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ -a & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a & -a & a & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & a \end{vmatrix}$$

dove gli elementi della prima linea sono tutti eguali ad a, e così quelli della diagonale principale.

Gli elementi al disotto di questa sono tutti $-a$, e gli altri elementi $a_{23} \dots a_{2n} \dots a_{3n} \dots$ sono qualunque. Il determinante è indipendente dal valore di questi elementi; infatti si può mostrare che il complemento di uno qualunque di questi elementi è zero.

Il valore del determinante può allora calcolarsi ponendo eguali a zero tutti gli altri elementi $a_{23} \dots a_{2n} \dots$.

Si trova

$$D = 2^{n-1} a^n .$$

§ 41. — Determinanti delle funzioni fratte.

Si chiamano *determinanti delle funzioni fratte* quelli della seguente forma

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots a_1 \end{vmatrix}$$

e si chiamano così perchè si può subito far vedere che con essi si possono esprimere i coefficienti delle funzioni frazionarie.

Sviluppando quei determinanti secondo gli elementi della prima colonna si ha subito la seguente formola di ricorrenza.

$$A = a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} + a_3 A_{n-3} - \dots \pm a_n .$$

Fórmiamo ora

$$a(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \dots$$

È facile verificare che $\frac{1}{a(x)}$ è eguale a

$$A(x) = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \dots$$

dove le A hanno la forma dei determinanti soprascritti.

In effetti moltiplicando $a(x)$ per $A(x)$ si ha

$$A(x)\,a(x) = 1 - (A_1 - a_1)\,x + (A_2 - A_1\,a_1 + a_2)\,x^2 + \dots$$

ed essendo, per la formola di ricorrenza, tutti zero i coefficienti del secondo membro, si ha semplicemente

$$A(x)\,a(x) = 1$$

il che dimostra l'assunto.

Per queste e altre considerazioni analoghe si può vedere DIETRICH. (*Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunctionen;* Crelle. Vol. LXIX, p. 190.)

§ 42. — DETERMINANTE DI SMITH.

Consideriamo il seguente determinante detto di SMITH:

$$D = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) \end{vmatrix}$$

dove con

$$(i, j)$$

si intende il massimo comun divisore dei due numeri interi, i, j.

Nella teoria dei numeri si indica col simbolo $\varphi(n)$ il numero dei numeri inferiori ad n e primi

con n, e si sa che la somma

$$\sum_m \varphi(m)$$

quando il sommatorio si estende a tutti i numeri m divisori di n, è n, cioè

$$\sum_m \varphi(m) = n.$$

Quindi il massimo comun divisore (i, j) fra due numeri i, j si può mettere sotto la forma di un sommatorio di tanti $\varphi(m)$ esteso a tutti gli m che sono divisori comuni dei due numeri i, j. Cioè possiamo scrivere

$$(i, j) = a_{i1} a_{j1} \varphi(1) + a_{i2} a_{j2} \varphi(2) + \ldots + a_{in} a_{jn} \varphi(n)$$

dove a_{ik}, a_{jk} sono l'unità o zero secondochè k è o no un divisore di i o j. Quindi a_{ik} a_{jk} sono zero, se $k > i$ ovvero $k > j$.

In tal maniera il determinante delle a_{ik} è della forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

il cui valore è 1 perchè sono zero tutti gli elementi da una stessa parte della diagonale principale.

Il determinante dato potendosi allora considerare come il prodotto di

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

per

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,\varphi(1) & a_{12}\,\varphi(2) & \dots & a_{1n}\,\varphi(n) \\ a_{21}\,\varphi(1) & a_{22}\,\varphi(2) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ed essendo eguale ad 1 il primo determinante, ed eguale a $1 . \varphi(1)\,\varphi(2) \dots \varphi(n)$ il secondo, si ha infine che il determinante di Smith è eguale a $\varphi(1)\,\varphi(2) \dots \varphi(n)$.

Sopra siffatti determinanti esistono lavori di SMITH, (*Proc. of London Math. Soc.* Vol. VII, p. 208, 1876); MANSION, CATALAN, LEPAIGE negli *Annales de la Soc. de Bruxelles* e nella *Nouv. Corr. math.* Si possono poi vedere i lavori di

MANSION, *Sur la théorie des nombres.* Gand, 1878, § III.

CESÀRO, *Determinanti in aritmetica.* (Giorn. di Batt. Vol. XXIII, pag. 182 (1885.)

CESÀRO, *Considérations nouvelles sur les déterminants de Smith.* Ann. de l'École norm. 3.e série. T. II, pag. 425 (1885).

§ 43. — DETERMINANTI DI DIFFERENZE.

Si abbia una serie di quantità

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n \ a_{n+1} \ \dots$$

Si formino le prime differenze

$$\Delta_1^{(1)} \ \Delta_2^{(1)} \ \Delta_3^{(1)} \ \dots \ \Delta_n^{(1)}$$

poi le seconde e così di seguito

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1^{(2)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(2)} & \dots & \Delta_n^{(2)} \\ \Delta_1^{(3)} & \Delta_2^{(3)} & \Delta_3^{(3)} & \dots & \Delta_n^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_1^{(n-1)} & \Delta_2^{(n-1)} & \Delta_3^{(n-1)} & \dots & \Delta_n^{(n-1)} \end{array}$$

e supponiamo che queste ultime sieno costanti, eguali a C. *Si formi il determinante colle prime n colonne e n linee di questo quadro. Un tal determinante è eguale alla potenza n^{ma} della costante C.* (V. RAIMONDI, *Giorn. di Batt.* Vol. XXVI, p. 185.)

A proposito dei determinanti di differenze ricordiamo che abbiamo avuto occasione di trattarne a proposito dei cosiddetti determinanti di Hankel, i quali hanno appunto la proprietà di potersi rappresentare come determinanti di differenze (v. § 19), ma in maniera diversa da quella qui considerata.

§ 44. — DETERMINANTI CIRCOLANTI PARTICOLARI.

È utile ricordare anche il valore del seguente speciale determinante circolante

$$\begin{vmatrix} p+q, & p+2q, & \dots & p+nq \\ p+2q, & p+3q, & \dots & p+q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+nq, & p+q, & \dots & p+(n-1)q \end{vmatrix}.$$

Tal valore è

$$(-1)^{\frac{n.n-1}{2}} q^n \left\{ n \frac{p}{q} + \frac{n \cdot n+1}{2} \right\} n^{n-2}.$$

Per

$$p=0, \; q=1$$

si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n.n-1}{2}} \frac{n \cdot n+1}{2} n^{n-2}.$$

Per questi determinanti si può vedere

CREMONA, *Nouv. Ann.*, 1.ª serie. T. XIX, pagina 153.

LEMONNIER, *Bull. de la Soc. math.* Vol. VII, pag. 175.

§ 45. — DETERMINANTI DELLE FRAZIONI CONTINUE. CONTINUANTI.

Un determinante della forma

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = C_n$$

in cui sono zero tutti gli elementi, meno quelli della diagonale principale che sono eguali a quantità arbitrarie, e quelli compresi nelle due parallele prossime da una parte e dall'altra della diagonale principale che sono rispettivamenti eguali a $+1$ e a -1, si chiama un *continuante (Sylvester)*.

Si può poi anche considerare un *continuante* più generale dove in luogo p. es. degli elementi -1 o degli elementi 1, si pongono delle quantità $b_1 \ldots b_{n-1}$ arbitrarie.

Sviluppando quel determinante secondo i prodotti dei minori contenuti nelle ultime m linee si ha:

$$C_n = C_m \, C'_{n-m} + C_{m-1} \, C'_{n-m-1}$$

dove con C'_ν si indica il continuante in cui gli elementi principali sono $a_{\nu+1} \ldots a_m$.

Di qui per $m = n - 1$ abbiamo una formola di ricorrenza cui soddisfanno i *continuanti*, cioè

$$C_n = a_n \, C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Vogliamo calcolare il numero dei termini che contiene un continuante generale.

È facile prima di tutto dimostrare che lo sviluppo del continuante di ordine pari si riduce alla somma dell'unità e di una serie di termini ognuno formato col prodotto di un certo numero pari delle a e col coefficiente 1, e se n è dispari lo stesso sviluppo si riduce alla somma di prodotti di un numero dispari delle a. Infatti se questa legge si conserva sino ai continuanti di ordine $n - 1$, sarà vera anche per quelli di ordine n

come si vede dalla formola di ricorrenza sopra stabilita; ora per $n = 3$ si ha appunto

$$C_3 = a_1 a_2 a_3 + a_3,$$

e per $n = 2$ si ha $C_2 = a_1 a_2 + 1$; quindi la legge sarà vera sempre.

Di qui si ricava che, se in luogo delle a poniamo 1, ogni termine diventa l'unità positiva, e quindi otteniamo un numero intero che rappresenta il numero dei termini del continuante generale. Questo numero è dunque rappresentato dal determinante

$$c_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

La formola di ricorrenza per questo determinante dà

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

I numeri c_n formano dunque una successione di numeri interi di cui ognuno è eguale alla somma dei due precedenti. Questa successione si suol chiamare la serie di FIBONACCI.

Ora è facile verificare che in generale

$$c_n = \binom{n}{o} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-k}{k}$$

dove $k = \frac{n}{2}$ se n è pari, ovvero

$$k = \frac{n-1}{2} \text{ se } n \text{ è dispari.}$$

In effetti se questa legge si conserva sino a $n-1$, cioè se

$$c_{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots$$

$$c_{n-2} = \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \ldots$$

osservando che

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$$

è facile riconoscere che anche per c_n si conserverà la stessa legge di formazione.

I determinanti di questo § si chiamano *continuanti* perchè hanno relazione colle frazioni *continue*. In effetti è facile riconoscere che

$$a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2}$$

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & a_3 \end{vmatrix}}$$

e così in generale la frazione continua

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

è eguale al quoziente di due continuanti, uno cogli elementi principali $a_1 \ldots a_n$ e l'altro, al denominatore cogli elementi principali $a_2 \ldots a_n$.

Allo stesso risultato si giunge se invece di considerare le frazioni continue sopra indicate si considerano quelle più generali

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}.$$

Questa frazione continua è eguale al quoziente dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & a_2 & b_3 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{di ordine } n$$

e

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_3 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & a_3 & b_4 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{di ordine } n-1.$$

Il secondo è il complemento dell'elemento a_1 nel primo.

Questi determinanti sono dei continuanti più generali di quelli avanti considerati, e si può facilmente riconoscere che soddisfanno a proprietà analoghe. P. es. sviluppando il primo di essi che chiameremo A_n secondo gli elementi dell'ultima orizzontale si ha

$$A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2}$$

formola di ricorrenza simile a quella sopra trattata.

In un paragrafo precedente abbiamo visto come la somma delle potenze simili delle radici di un'equazione si può mettere sotto forma di determinante (v. § 39). Se l'equazione data è

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

si ha propriamente

$$(-1)^m s_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots 0 \\ 2\,a_2 & a_1 & a_0 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m\,a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots a_1 \end{vmatrix}.$$

Poniamo ora in particolare

$$a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$$
$$a_0 = 1$$

allora $n-2$ radici dell'equazione data diventano zero e le altre due saranno quelle di

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

La s_m diventa evidentemente solo la somma delle potenze m^{me} delle due radici di questa equazione quadratica, e resterà espressa con

$$(-1)^m s_m = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}}_{m-1} - 2a_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}}_{m-2}.$$

Come si vede la s_m viene ad esprimersi allora mediante due *continuanti* di ordine $m-1$, e $m-2$.

Si può stabilire la teoria delle frazioni continue prendendo il punto di partenza dalla espressione di esse mediante determinanti. Noi non ci fermeremo su queste considerazioni e porremo solo qui una nota bibliografica sull'argomento.

I primi che si sono occupati dell'argomento sono stati Ramus, Sylvester (*Phil. Magazine* t. V p. 453, VI p. 297, 1853), Spottiswoode (*Crelle* Vol. LI), Heine (*Crelle* Vol. LVI), Thiele (*Tidsskrift for Math.*, Vol. V, p. 144), e Günther. (*Darstellung der Näherungswerthe von Ketten-*

brücken in independenter Form. Erlangen 1873.) Di questo ultimo autore si può vedere per altre notizie e indicazioni storiche il capitolo V della seconda edizione della sua *teoria dei Determinanti* (Erlangen, 1877). Di GÜNTHER possono ancora vedersi i lavori in *Grunert's Archiv*, etc., Vol. LIV, p. 397; in *Math. Ann.* Vol. VII, p. 267, e infine *Beiträge zur Erfindungsgeschicte des Kettenbrücke*, Weissenburg, 1872. Sullo stesso argomento si può anche vedere MUIR, *Phil. Mag.* 1877, p 137, 360.

Un determinante della specie dei continuanti è stato considerato ultimamente da MOLLAME, *Rivista di mat.*, t. III, p. 47 (1893).

§ 46. — SUI DETERMINANTI DI SOSTITUZIONI ORTOGONALI.

Un determinante

$$|a_{ij}|$$

si dice *un determinante di sostituzione ortogonale* o più brevemente *determinante ortogonale* se sono soddisfatte le seguenti relazioni fra gli elementi

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2 = 1$$
$$a_{1i}\,a_{1j} + a_{2i}\,a_{2j} + \ldots + a_{ni}\,a_{nj} = 0.$$

La prima proprietà che risulta immediatamente da questa definizione è:

Il quadrato di un determinante di sostituzione ortogonale è l' unità positiva. Basta infatti eseguire

il quadrato del determinante colla regola solita, e allora si trova che tutti gli elementi della diagonale principale risultano eguali ad 1, e risultano eguali a zero tutti gli altri elementi. Di qui si ricava che il valore di un determinante ortogonale è sempre ± 1.

Una seconda proprietà elementare è la seguente:

Il complemento algebrico di un elemento è eguale all'elemento stesso moltiplicato per il determinante.

In effetti partiamo dalle relazioni

$$a_{11}\, a_{1i} + a_{21}\, a_{2i} + \ldots + a_{n1}\, a_{ni} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1i}\, a_{1i} + a_{2i}\, a_{2i} + \ldots + a_{ni}\, a_{ni} = 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1n}\, a_{1i} + a_{2n}\, a_{1i} + \ldots + a_{nn}\, a_{ni} = 0$$

e indicando rispettivamente con A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij}, moltiplichiamo queste equazioni rispettivamente per $A_{j1}\, A_{j2} \ldots A_{ji} \ldots A_{jn}$ e sommiamole. Ricordando che è zero la somma dei prodotti degli elementi di una linea per i complementi algebrici degli elementi di una linea parallela, si ha (chiamando D il determinante dato),

$$D\, a_{ji} = A_{ji}$$

formola che dimostra il teorema.

Per definizione, un determinante di sostituzione ortogonale è quello in cui è 1 la somma dei quadrati degli elementi situati in una stessa colonna, ed è zero la somma dei prodotti degli elementi

situati in una colonna per gli omologhi di una colonna parallela. Ora si può mostrare che *se questa proprietà si verifica relativamente alle colonne si verificherà anche relativamente alle linee, cioè che fra gli elementi sussistono anche le relazioni*

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = 1$$
$$a_{i1}\, a_{j1} + a_{i2}\, a_{j2} + \ldots + a_{in}\, a_{jn} = 0.$$

Perchè, essendo in generale

$$D \,.\, a_{ik} = A_{ik}$$

donde

$$D \,.\, a_{ik}\, a_{jk} = A_{ik}\, a_{jk}$$

ponendo $k = 1, 2, \ldots n$, e sommando si ha

$$D\,(a_{i1}\, a_{j1} + \ldots + a_{in}\, a_{jn}) = A_{i1}\, a_{j1} + \ldots A_{in}\, a_{jn}$$

e il secondo membro ha valore D ovvero zero secondochè $j = i$, ovvero j è diverso da i.

La proprietà contenuta nel secondo teorema si si può estendere ai minori di ordine qualunque.

Si può mostrare che:

Ogni minore è eguale al suo complemento algebrico moltiplicato per il determinante dato D.

In effetti se moltiplichiamo per D tutti gli elementi di un minore di ordine m, questo resta moltiplicato per D^m. Intanto il prodotto di ogni elemento per D si riduce al suo complemento algebrico, e quindi si ha il minore omologo nel determinante *reciproco* al dato, il qual minore omologo, come si sa, è eguale al complemento algebrico del minore dato moltiplicato per D^{m-1}. Dalla eguaglianza dei due membri risulta il teorema.

È notevole anche quest'altro teorema:

Il prodotto di due determinanti ortogonali è anche un determinante ortogonale.

In effetti se

$$| a_{ij} | = A, \quad | b_{ij} | = B$$

sono i due determinanti ortogonali dati, il loro prodotto sarà

$$A\,B = | a_{1i}\, b_{1j} + \ldots + a_{ni}\, b_{nj} |.$$

Ora facendo la somma dei quadrati degli elementi di una linea si ha

$$b_{1j}^2 \sum_i a_{1i}^2 + \ldots b_{nj}^2 \sum_i a_{ni}^2 + 2\, b_{1j}\, b_{2j} \sum_i a_{1i}\, a_{2i} + \ldots$$

che è eguale a

$$\sum_j b_{1j}^2$$

cioè a 1.

Analogamente la somma dei prodotti degli elementi di una linea pei loro omologhi in un'altra si riconosce facilmente eguale a zero. Dunque $A \,.\, B$ è un determinante ortogonale.

§ 47. — Problema di Cayley.

Nello studio dei determinanti ortogonali una ricerca importante è la seguente:

Gli n^2 elementi sono legati da $\frac{1}{2}\, n\, (n + 1)$ re-

lazioni; quindi di indipendenti fra essi ne restano solo

$$n^2 - \frac{1}{2} n (n+1) = \frac{n . (n-1)}{2} .$$

In che modo possiamo costruire un determinante ortogonale in cui gli elementi sieno espressi tutti mediante $\frac{1}{2} n (n-1)$ quantità indipendenti? EULERO e CAUCHY si occuparono per i primi di questa ricerca che poi è stata fatta in generale dal CAYLEY.

Il risultato trovato dal Cayley è il seguente:

Consideriamo un determinante *gobbo* di ordine n in cui tutti gli elementi principali sieno tutti eguali fra loro.

Esso abbia per elementi b_{ij} e sia

$$B = \begin{vmatrix} b & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b \end{vmatrix} .$$

Essendo $b_{ij} = - b_{ji}$ gli elementi fra loro diversi sono in numero di

$$\frac{1}{2} n (n-1) + 1.$$

Indicando con B_{ij} il complemento algebrico di b_{ij}, e formando gli elementi

$$a_{ij} = \frac{2 \, b \, B_{ij}}{B}$$

$$a_{ii} = \frac{2\,b\,B_{ii} - B}{B} = \frac{2\,b\,B_{ii}}{B} - 1$$

si può far vedere che le a sono gli elementi di un determinante *ortogonale*, eguale a $+1$.

Consideriamo $3\,n$ quantità

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{matrix}$$

ponendo

$$x_i = b_{1i}\,z_1 + \ldots + b_{ni}\,z_n$$
$$y_i = b_{i1}\,z_1 + \ldots + b_{in}\,z_n\,.$$

Essendo

$$b_{ij} = -\,b_{ji}$$
$$b_{ii} = b$$

si ha

$$x_i + y_i = 2\,b\,z_i\,.$$

Moltiplichiamo le x rispettivamente per

$$B_{j1}\,B_{j2} \ldots B_{jn}$$

e sommiamo tenendo presenti le relazioni esistenti fra le b e le B.

Si ha evidentemente

$$B_{j1}\,x_1 + B_{j2}\,x_2 + \ldots + B_{jn}\,x_n = B\,z_j$$

e analogamente

$$B_{1j}\,y_1 + B_{2j}\,y_2 + \ldots + B_{nj}\,x_n = B\,.\,z_j$$

e se ai secondi membri in luogo di Bz_j poniamo

$$B\frac{x_j + y_j}{2b}$$

si ha

$$By_j = 2bB_{j1}x_1 + \ldots + (2bB_{jj} - B)x_j + \ldots + 2bB_{jn}x_n$$
$$Bx_j = 2bB_{1j}y_1 + \ldots + (2bB_{jj} - B)y_j + \ldots + 2bB_{nj}y_n$$

e introducendo le a si ha

$$y_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$$
$$x_j = a_{1j}y_1 + \ldots + a_{nj}y_n$$

e se in questa seconda sostituiamo i valori delle y dati dalla prima equazione, e poi eguagliamo a zero i coefficienti delle x si ha

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \ldots + a_{nj}^2 = 1$$
$$a_{1j}a_{1i} + a_{2j}a_{2i} + \ldots + a_{nj}a_{ni} = 0.$$

Resta così provato che le a sono gli elementi di un determinante ortogonale; si può subito completare la ricerca dimostrando che tal determinante è eguale a $+1$.

In effetti il determinante delle a è

$$\frac{1}{B^n}\begin{vmatrix} 2bB_{11} - B & 2bB_{12} & \ldots & 2bB_{1n} \\ 2bB_{21} & 2bB_{22} - B & \ldots & 2bB_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2bB_{n1} & 2bB_{n2} & \ldots & 2bB_{nn} - B \end{vmatrix}$$

Moltiplichiamo questo determinante per il de-

terminante delle b, e osserviamo che

$$B_{i1}\,b_{j1} + \ldots + B_{ii}\,b_{ji} + \ldots + B_{in}\,b_{jn} = 0$$
$$B_{i1}\,b_{i1} + \ldots + B_{ii}\,b \quad + \ldots + B_{in}\,b_{in} = B$$

donde moltiplicando per $2\,b$, ed essendo

$$b_{ji} = -\,b_{ij}\,;$$

si ha:

$$2\,b\,B_{i1}\,b_{j1} + \ldots + (2\,b\,B_{ii} - B)\,b_{ji} + \ldots + B_{in}\,b_{jn} = B b_{ij}$$
$$2\,b\,B_{i1}\,b_{i1} + \ldots + (2\,b\,B_{ii} - B)\,b \quad + \ldots + B_{in}\,b_{in} = Bb.$$

Da queste formole appare che eseguendo per linee il prodotto indicato si ha per risultato B^n moltiplicato per il determinante delle b, cioè ancora per B, e quindi si ha in tutto B^{n+1}. Perciò il determinante precedente è B^n, e quindi il determinante delle a è esattamente $+1$.

In questa maniera si ha un determinante ortogonale i cui elementi sono espressi *razionalmente* mediante $\frac{n \,.\, n \quad 1}{2}$ quantità indipendenti, cioè le b_{ij}. La quantità b può prendersi per semplicità eguale ad 1.

Per un'interessante osservazione di KRONECKER, relativa a questa soluzione di Cayley, si può vedere l'ultima pagina di un lavoro di NETTO, *Acta math.*, Vol. IX, p. 299, 300 (1887).

Per $n = 2$ gli elementi del determinante delle a sono (ponendo $b_{12} = -\,b_{21} = \lambda$)

$$\begin{matrix} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \dfrac{2\,\lambda}{1+\lambda^2} \\ -\dfrac{2\,\lambda}{1+\lambda^2} & \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{matrix}.$$

Per $n=3$ ponendo

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

gli elementi a diventano

$$\begin{matrix} \dfrac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B} & 2\,\dfrac{\nu+\lambda\mu}{B} & 2\,\dfrac{-\mu+\lambda\nu}{B} \\ 2\,\dfrac{-\nu+\lambda\mu}{B} & \dfrac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B} & 2\,\dfrac{\lambda+\mu\nu}{B} \\ 2\,\dfrac{\mu+\lambda\nu}{B} & 2\,\dfrac{-\lambda+\mu\nu}{B} & \dfrac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B} \end{matrix}.$$

I determinanti ortogonali si presentano specialmente in questioni geometriche, e propriamente per $n=2$ si presentano nella trasformazione di assi coordinati rettangolari nel piano, e per $n=3$ nella questione analoga dello spazio.

Se si vuole trasformare un sistema di assi rettangolari in un altro anche rettangolare, lasciando fissa l'origine delle coordinate, i coefficienti delle formole di trasformazione sono precisamente gli elementi di un determinante ortogonale. È sotto questa forma che il problema si presentò per la prima volta ad Eulero.

Per la letteratura sull'argomento dei determinanti ortogonali citiamo i seguenti lavori:

Eulero, *Novi Comm. Petrop.* T. XV, pag. 75, T. XX, pag. 217.

Cauchy, *Exercices de Math.* Vol. IV, p. 140.

JACOBI, *Crelle.* Vol. XII, pag. 7, Vol. XXX, pag. 46.
CAYLEY, *Crelle.* Vol. XXXII, pag. 119.
BRIOSCHI, *Journ. de Liouville.* Vol. XIX, pagina 253.
VELTMANN, *Zeits. f. Math. u. Phys.* Vol. XVI, pag. 523.
SYLVESTER, *Cambridge math. Journ.* Vol. VII, pag. 52.
SCHLAEFLI, *Grunert's Archiv.* etc. Vol. XIII, pag. 276; *Crelle.* Vol. LXV, pag. 186.
HESSE, *Crelle.* Vol. LVII, pag. 175.
STIELTJES, *Acta math.* Vol. VI, pag. 319.
NETTO, *Acta math.* Vol. IX, pag. 295; Volume XIX, pag. 105; *Crelle.* Vol. CVIII, pagina 144 (1890).
VOSS, *Zur Theorie der orth. Subst.* Math. Ann. Vol. XIII, pag. 320.
ALBEGGIANI, *Giorn. di Batt.* Vol. X, p. 279.
SIACCI, *Annali di mat.* Vol. V, p. 302; *Giorn. di Batt.* Vol. X, pag. 188.
IGEL, *Monatshefte*, etc. Vol. III, pag. 60 e seg.
LORIA, *Jornal de Sciencias math.* (Coimbre). Vol. VII, pag. 129 (1886).
KRONECKER, *Berl. Akad.* 1890; *Crelle*, Volume CVII, pag. 254.

In quel che segue noteremo vari dei più importanti teoremi trovati sui determinanti ortogonali.

§ 48. — Teorema di Brioschi.

Le a_{ij} sieno gli elementi di un determinante ortogonale $D\,(=\pm 1)$ e si formi il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = f(x).$$

La equazione

$$f(x)=0$$

è una equazione reciproca la quale per n dispari ha per radice $x=-D$ e nessun' altra radice reale, e per n pari e per $D=-1$ ha le radici $x=\pm 1$ e nessun' altra radice reale. (Brioschi, op. cit.)

In effetti sviluppiamo $f(x)$ secondo le potenze di x colla regola che già conosciamo (v. § 11). I coefficienti di x^k e x^{n-k} sono le somme dei minori principali di ordine $n-k$, e k rispettivamente. Ogni minore principale di ordine k ha per complemento un minore principale di ordine $n-k$, e, per un teorema sopra dimostrato, relativo ai determinanti ortogonali, uno di essi è eguale all'altro moltiplicato per D. Dunque i coefficienti di x^k e x^{n-k} sono eguali fra loro a meno di un fat-

tore D ($= \pm 1$). Si ha propriamente

$$\frac{D\,f(x)}{x^n} = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Se quindi l'equazione ha per radice x, avrà anche per radice $\frac{1}{x}$ cioè l'equazione è *reciproca*.

Poniamo nell'ultima relazione

$$x = -D.$$

Si ha $\left(\text{essendo anche } \frac{1}{x} = -D \text{ perchè } D = \pm 1\right)$

$$f(-D) = (-1)^n D^{n-1} f(-D).$$

Se n è dispari, questa relazione non può essere soddisfatta se $f(-D)$ non è zero, cioè $x = -D$ è radice di $f(x)$.

Se n è pari e $D = -1$ questa relazione non può essere soddisfatta se non si verifica la stessa circostanza cioè che $f(-D)$ sia zero; sarà allora $-D = +1$ radice di f. E sarà allora radice di f anche $x = -1$ perchè ponendo nella relazione generale di sopra.

$$D = -1 \quad \text{e} \quad x = -1$$

si avrebbe

$$f(-1) = (-1)^{n-1} f(-1).$$

relazione che dà $f(-1) = 0$ se n è pari.

Bisogna ora dimostrare che tutte le altre radici *non sono reali*. Formiamo il prodotto $f(x)\,f(-x)$.

Poniamo

$$\sum_j a_{ij}^2 = c_{ii}$$

$$\sum_j a_{ij}\, a_{kj} = c_{ik}.$$

Per le proprietà dei determinanti ortogonali si ha

$$c_{ii} = 1 \qquad c_{ik} = 0$$

onde il prodotto resta espresso sotto la forma

$$\begin{vmatrix} 1 - x^2 & , (a_{12} - a_{21})\, x, & \dots & (a_{1n} - a_{n1})\, x \\ (a_{21} - a_{12})\, x, & 1 - x^2 & \dots & (a_{2n} - a_{n2})\, x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1} - a_{1n})\, x, & (a_{n2} - a_{2n})\, x, & \dots & 1 - x^2 \end{vmatrix}.$$

Dividendo per x gli elementi di tutte le linee si ha

$$\frac{f(x)\, f(-x)}{x^n} =$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{x} - x\right), & (a_{12} - a_{21}), & \dots & (a_{1n} - a_{n1}) \\ (a_{21} - a_{12}), & \left(\frac{1}{x} - x\right), & \dots & (a_{2n} - a_{n2}) \\ (a_{n1} - a_{1n}), & (a_{n2} - a_{2n}), & \dots & \left(\frac{1}{x} - x\right) \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che tutti i minori principali contenuti nel determinante che si ricava da questo ponendo zero al posto degli elementi principali, sono

tutti determinanti *emisimmetrici*, e quindi sono zero tutti quelli di ordine *dispari*, e sono *quadrati perfetti* quelli di ordine *pari* (v. § 16).

Ricordando lo sviluppo di questo determinante secondo le potenze di $\left(x - \frac{1}{x}\right)$, si vede di qui che un tale sviluppo verrà a contenere solo i termini colle potenze n, $n-2$, $n-4$, ecc. di quel binomio, i cui coefficienti sono somme di minori principali di ordine pari, e quindi sempre positivi perchè somme di quadrati.

Lo sviluppo sarà quindi del tipo

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^n + \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-2} A_2 \;+\; \ldots = 0$$

dove A_2 A_4 . . . sono numeri *positivi*.

Per un qualunque x reale, il primo membro di questa equazione avrà dunque sempre valore positivo e quindi non potrà essere zero, almenochè l'ultimo termine non contenga per fattore $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ il che richiede che A_n sia zero e quindi o che n sia dispari, ovvero che n sia pari ma che D sia eguale a -1 come si è visto sopra in altro modo.

È in tali casi che alcune delle radici possono essere quelle di $x - \frac{1}{x} = 0$ cioè ± 1.

Si potrebbe effettivamente dimostrare che quando $D = -1$ e n è pari, allora A_n cioè

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & \ldots \\ a_{12} - a_{21} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

è eguale a zero. Ma questo risulta qui indirettamente per le dimostrazioni fatte sopra, perchè se A_n è diverso da zero, $f(x)\, f(-x)$ non potrebbe avere radici reali, mentre che sappiamo che per n pari, e $D = -1$, un tal prodotto ha certamente per radici ± 1.

§ 49. — Teoremi di Siacci.

Cade a proposito qui riferire vari teoremi del Siacci, Op. cit., a proposito di determinanti formati cogli elementi di altri determinanti (v. § 28).

Se gli elementi delle linee di un determinante ortogonale di ordine n, avente il valore $\varepsilon = \pm 1$, moltiplicate per $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ si sommano a quelli delle linee di un altro determinante ortogonale dello stesso ordine, avente il medesimo valore ε, moltiplicate per $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$, si hanno gli elementi di un determinante che non muta, scambiando fra loro le α colle β.

Sieno a_{ik} gli elementi del primo determinante, e b_{ij} quelli del secondo.

Il determinante risultante sarà:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_{11} + \beta_1 b_{11}, & \ldots & \alpha_n a_{1n} + \beta_n b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1 a_{n1} + \beta_1 b_{n1}, & \ldots & \alpha_n a_{nn} + \beta_n b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Scomponendo questo determinante ad elementi binomii secondo la regola nota (v. § 10) si ha

una somma di determinanti del tipo

$$(-1)^s \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \beta_{i_{k+1}} \ldots \beta_{i_n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} \ldots a_{1i_k} & b_{1i_{k+1}} \ldots b_{1i_n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{ni_1} \ldots a_{ni_k} & b_{ni_{k+1}} \ldots b_{ni_n} \end{vmatrix}$$

dove $i_1\, i_2 \ldots i_n$ rappresenta una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots n$. Propriamente le colonne del determinante non vengono disposte come le abbiamo segnate, ma invece in modo che gli indici $i, i \ldots i_n$ sieno disposti secondo l'ordine crescente di grandezza. È perciò che abbiamo messo in vista il fattore $(-1)^s$ essendo s il numero delle inversioni contenute nella permutazione $i_1 \ldots i_n$.

Sviluppiamo il determinante soprascritto per prodotti dei minori contenuti nelle prime k colonne per i loro complementi. Ognuno di tali minori è, per le proprietà dei determinanti ortogonali, eguale al suo complemento in A o in B rispettivamente moltiplicato per ε che è il valore comune dei due determinanti A o B. Abbiamo dunque (essendo $\varepsilon^2 = 1$) che il valore del determinante soprasegnato è lo stesso di quello del determinante:

$$\begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_k} & \ldots & a_{1i_{k+1}} & \ldots & a_{1i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{ni_1} & b_{ni_k} & \ldots & a_{ni_{k+1}} & \ldots & a_{ni_n} \end{vmatrix}.$$

Se moltiplichiamo questo per

$$(-1)^s \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_k} \ldots \alpha_{i_{k+1}} \ldots \alpha_{i_n}.$$

abbiamo evidentemente un altro termine dello svi-

luppo del determinante totale ad elementi binomii, il qual termine, per le cose dette, sarà eguale al termine soprasegnato quando in esso si scambiano le α colle β. Possiamo dunque dire che sviluppando opportunamente il determinante ad elementi binomii, i termini dello sviluppo si raggruppano a due a due, che si ricavano l'uno dall'altro scambiando le α colle β. Per conseguenza tutto il determinante non muta con tale scambio. Da questa dimostrazione risulta ancora che *se i determinanti ortogonali dati, non hanno ambedue il valore* ε, *ma uno sia* ε *e l'altro* $-\varepsilon$, *allora il determinante che ne risulta muta di segno collo scambio di* α *con* β.

Ponendo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1 \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = -1$$

e osservando che allora collo scambio di α con β, ogni elemento muta di segno, si ha:

Se dagli elementi di un determinante ortogonale di grado dispari, si sottraggono quelli di un altro che abbia il medesimo valore, si forma un determinante che ha per valore zero.

E ponendo invece $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$ $\beta_1 = \ldots = 1$ si ha:

Se agli elementi di un determinante ortogonale di ordine qualunque e di valore $\varepsilon\,(= \pm 1)$ *si aggiungono quelli di un altro determinante ortogonale dello stesso ordine e di valore* $-\varepsilon$, *si ha un determinante di valore zero.*

In modo simile si può dimostrare l'altro teorema:

Se agli elementi principali di un determinante ortogonale ε *di grado qualunque si aggiungono*

una volta le quantità

$$\alpha_1, \quad \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

e un' altra volta le quantità

$$\frac{1}{\alpha_1} \quad \frac{1}{\alpha_2} \ldots \frac{1}{\alpha_n}$$

si hanno due determinanti eguali se

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_n = \varepsilon.$$

In effetti sviluppiamo il primo determinante secondo i prodotti delle $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Un termine qualunque dello sviluppo sarà (v. § 11).

$$\alpha_{i_1} \; \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k} \; M$$

dove M è quel minore *principale* del determinante primitivo dato, il quale non contiene, nè le linee nè le colonne di ordini $i_1 \, i_2 \ldots i_k$.

In virtù dei teoremi più minori dei determinanti ortogonali, si ha che M è eguale al suo complemento moltiplicato per ε (essendo ε il valore del determinante dato). Intanto da

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_n = \varepsilon$$

si ha

$$\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} = \frac{\varepsilon}{\alpha_{i_{k+1}} \ldots \alpha_{i_n}}$$

dunque possiamo dire che il termine soprascritto è eguale a (essendo $\varepsilon^2 = 1$)

$$\frac{1}{\alpha_{i_{k+1}} \ldots \alpha_{i_n}} M'$$

essendo M' il complemento di M. Intanto questo è un termine dello sviluppo del *secondo* determinante formato, e quindi resta dimostrato l'assunto. Questi teoremi sono dimostrati con procedimento che nella sostanza è lo stesso di quello qui seguito, ma che nella forma è inutilmente più complicato, in ALBEGGIANI, Op. cit., p. 285-290.

Un altro teorema del SIACCI è il seguente:

Agli elementi principali di un determinante ortogonale ε *si aggiunga l'unità. Nel determinante* R *così formato si consideri il complemento di un elemento principale e sia* R_{kk}. *Si avrà allora la relazione*

$$R = (1 + \varepsilon)\, R_{kk}.$$

In effetti sviluppiamo R nel modo solito, cioè come somma di tutti i suoi minori principali e dell'unità. Si ha

$$R = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i,j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \ldots + \varepsilon$$

dove i sommatorii si intendono estesi a tutti i valori 1, 2, . . . n.

Il secondo membro lo possiamo scrivere

$$R = \left[1 + \sum_i{}' a_{ii} + \sum_{ij}{}' \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \ldots\right] + \left[\varepsilon + a_{kk} + \sum_1 \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{ki} \\ a_{ik} & a_{ii} \end{vmatrix} + \ldots\right]$$

dove col simbolo Σ' si vuol intendere che dai valori degli indici $i, j, \ldots$ si esclude sempre il va-

lore k, per modo che allora la prima parte del secondo membro, che chiameremo (A), non è altro che lo sviluppo di R_{kk}.

La seconda parte del secondo membro, che chiameremo $(B$, è anche, a meno di un fattore ε, eguale alla prima parte.

Perchè moltiplicandola per ε si ha

$$1 + \varepsilon\, a_{kk} + \varepsilon \sum_i \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{ki} \\ a_{ik} & a_{ii} \end{vmatrix} + \dots$$

Ora per le solite relazioni fra i minori di un determinante ortogonale si ha che $\varepsilon\, a_{kk}$ è eguale al complemento di a_{kk} nel determinante ortogonale dato, cioè all'ultimo termine di (A) e così ciascuno dei prodotti

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{ki} \\ a_{ik} & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots k-1, k+1, \dots n)$$

è eguale a ciascuno dei termini del penultimo sommatorio di (A), e così di seguito si vede che

$$\varepsilon\,(B) = (A)$$

o anche

$$(B) = \varepsilon\,(A) = \varepsilon\, R_{kk}$$

donde la formola soprascritta.

Di qui si ricava

1. *Tutti i complementi degli elementi principali sono tutti fra loro eguali.*

2. *Se* $\varepsilon = -1$ *si ha* $R = 0$; *se* $\varepsilon = +1$ *si ha*

$$R_{kk} = \frac{1}{2} R.$$

Questo teorema sotto una forma diversa e con diversa dimostrazione si trova in Siacci, *Annali di Mat.*, Vol. V, p. 302, 1872. Si trova poi ancora sotto la stessa forma datagli sopra, in un lavoro recente di Netto, *Acta math.*, Vol. XIX. p. 110, 1895.

Il Netto enuncia questo teorema a proposito di un altro teorema di Stieltjes che ora passeremo a discutere.

§ 50. — Teorema di Stieltjes.

Noi abbiamo trovato questo risultato: che se agli elementi principali di un determinante ortogonale ε si aggiunge l'unità, si ha un determinante R, legato ad un qualunque suo minore principale R_{kk} dalla relazione

$$R = (1 + \varepsilon)\, R_{kk}.$$

Cominciamo ora dal fare la ricerca analoga per un minore non principale R_{kk}.

Si vede facilmente con un metodo simile a quello tenuto sopra che

$$R_{kl} = -\varepsilon\, R_{lk}.$$

Intanto per le proprietà dei determinanti reciproci, indicando con $R_{kk,ll}$ il minore principale di ordine $n-2$ di R complemento di

$$\begin{vmatrix} a_{kk}+1 & a_{kl} \\ a_{lk} & a_{ll}+1 \end{vmatrix},$$

si ha

$$\begin{vmatrix} R_{kk} & R_{kl} \\ R_{lk} & R_{ll} \end{vmatrix} = R \,.\, R_{kk,ll}$$

donde si ha la formola

$$R^2_{kl}\, \varepsilon\, (1 + \varepsilon)^2 = R\,[(1 + \varepsilon)^2\, R_{kk,ll} - R].$$

Questa formola unita colla precedente dà questo risultato:

Quando $\varepsilon = +1$, *allora, se* $R = o$, *saranno zero anche tutti i minori suoi di ordine* $n - 1$.

Questo non è che un caso particolare del teorema dato da STIELTJES senza dimostrazione nel vol. VI degli *Acta math.* e che sotto la forma più generale si esprime così:

Sieno a_{ij}, b_{ij} *gli elementi di due determinanti ortogonali di valore* $\varepsilon = +1$, *allora se è zero il determinante il cui elemento generale è*

$$a_{ij} + b_{ij}$$

saranno zero anche tutti i minori di ordine $n - 1$.

Sotto questa forma generale il teorema è stato dimostrato da NETTO, Op. cit.

Vediamo in che maniera si può ricavare il teorema generale dal caso particolare già dimostrato.

Formiamo il prodotto di

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}\,, & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + b_{n1}\,, & \ldots & a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix}$$

per

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Si ha, ricordando le relazioni fra gli elementi di un determinante ortogonale,

$$R = D\,B = \begin{vmatrix} \sum_i a_{1i}b_{1i}+1, & \sum_i a_{1i}b_{2i} & , \dots & \sum_i a_{1i}b_{ni} \\ \sum_i a_{2i}b_{1i} & , \sum_i a_{2i}b_{2i}+1, & \dots & \sum_i a_{2i}b_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i a_{ni}b_{1i} & , \sum_i a_{ni}b_{2i} & , \dots & \sum_i a_{ni}b_{ni}+1 \end{vmatrix}$$

il quale sarà, essendo $B=1$, a sua volta eguale al determinante D. Quest'ultimo determinante ha la forma del determinante R che compare nelle considerazioni di sopra, in quantochè il determinante che si ricava da esso sottraendo 1 dagli elementi principali, non è altro che il prodotto dei due dati A, B, e quindi, come si sa, è a sua volta un determinante ortogonale (v. § 46).

Supponendo $D=0$, quest'ultimo determinante R è anche zero, e quindi per il teorema precedente saranno zero tutti i suoi minori di ordine $n-1$.

Ora consideriamo p. es., il minore complemento del primo elemento in D; esso può scriversi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}+b_{21}, & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1}, & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}$$

e moltiplicato per B dà

$$\left|\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ \sum_i a_{2i} b_{1i} & \sum_i a_{2i} b_{2i} + 1 & \dots & \sum_i a_{2i} b_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i a_{ni} b_{1i} & \sum_i a_{ni} b_{2i} & \dots & \sum_i a_{ni} b_{ni} + 1 \end{array}\right| .$$

Sviluppando questo secondo gli elementi della prima linea, si ha una somma di prodotti di questi per minori di ordine $n-1$ di R, e quindi se $D=0$, anche quest'ultimo determinante è zero, donde si ricava che è zero quel minore considerato di D. Così resta dimostrato il teorema di Stieltjes.

§ 51. — Determinanti di ordine infinito.

Da non molto tempo sono stati considerati i determinanti di ordine *infinito,* cioè formati con un numero infinito di linee e di colonne.

A una questione di questo genere fu condotto l'astronomo Hill per un problema di astronomia (*On the part of the motion of the lunar perigee*, ecc., Cambridge, Wilson 1877; *Acta math.*, Vol. VIII), e più tardi il Poincaré (*Bull. de la Société math.*, T. XIII, p. 19). Infine lo stesso Poincaré ne fece oggetto di una nota a parte *Sur les déterminants d'ordre infini*, Bull. de la Société math., T. XIV, p. 77). Più tardi lo stesso soggetto è stato ripreso da Helge von Koch a proposito di un problema

sulle equazioni differenziali lineari. Nella seconda Memoria di questo autore si studiano con una certa estensione i determinanti di ordine infinito HELGE VON KOCH, *Sur une application des determinants infini à la theorie des equations diff. lin.*, Acta math., Vol. XV, p. 53. — HELGE VON KOCH, *Sur les determinants infini*, ecc., Acta math., Vol. XVI, pag. 217).

Consideriamo una matrice in cui sieno eguali ad 1 gli elementi della diagonale principale

$$\begin{matrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Prendiamo n colonne e n linee, e formiamo il determinante relativo. Facendo variare n si ha una successione indefinita di valori, il cui limite, supposto che esista, lo chiameremo il determinante di ordine infinito. Il Poincaré ha trovato una condizione *sufficiente* perchè un siffatto determinante sia *convergente*.

La condizione è espressa sotto questa forma semplice:

Se la serie doppia

$$\Sigma \, | a_{ij} |$$

dove i è diverso da j, è convergente, allora il determinante in cui gli elementi principali sieno eguali ad 1, *è convergente.*

In effetti il determinante D per un n finito si

potrebbe ottenere dal prodotto

$$\Pi = [1 + |a_{21}| + |a_{31}| + \ldots] \times$$
$$\times [1 + |a_{12}| + |a_{32}| + \ldots] \times$$
$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sviluppando questo prodotto e ponendo poi ai vari termini dello sviluppo coefficienti 1, -1, o zero, secondo i casi. Ne deduciamo che certamente D è minore in valore assoluto di Π. Consideriamo le due D e le due Π corrispondenti a due diversi valori di n.

Se in D_{n+p} ovvero in Π_{n+p} poniamo certi elementi eguali a zero, otteniamo D_n, Π_n. I termini che si annullano rappresentano dunque le differenze $D_{n+p} - D_n$, $\Pi_{n+p} - \Pi_n$, e d'altra parte i termini che si annullano in Π_{n+p} sono tutti positivi, e alcuni fra essi, col segno negativo o positivo sono quelli che si annullano in D_{n+p}.

Quindi possiamo conchiudere che in valore assoluto anche la differenza delle due D è minore di quella delle due Π corrispondenti, cioè

$$|D_{n+p} - D_n| < \Pi_{n+p} - \Pi_n$$

donde deduciamo che, se Π converge ad un limite, anche D converge ad un limite, perchè allora il limite di $\Pi - \Pi'$ è zero, e quindi è anche zero quello di $D - D'$.

Ora il prodotto infinito Π è convergente quando è convergente la serie

$$\Sigma\ |a_{ij}|$$

quindi il teorema resta dimostrato.

Per il caso in cui gli elementi diagonali non sono eguali ad 1, il von Koch ha trovato il teorema più generale, che *il determinante è convergente se la serie degli elementi non diagonali è convergente assolutamente e il prodotto degli elementi diagonali converge assolutamente.*

In effetti se il prodotto infinito

$$\Pi \, a_{ii}$$

è convergente, ponendo

$$a_{ii} = a'_{ii} + 1, \qquad a_{ij} = a'_{ij}$$

si ricava che la serie semplice

$$\Sigma \, | a'_{ii} |$$

è convergente e quindi tutta la serie doppia

$$\Sigma \, | a'_{ij} |$$

dove i, è eguale o diverso da j, è convergente, e perciò ripetendo il ragionamento fatto sopra senza più la limitazione che i sia diverso da j, si giunge a dimostrare la convergenza del determinante.

Il von Koch nel lavoro citato studia i determinanti da lui chiamati *della forma normale*, che sono quelli soddisfacenti a queste due condizioni: 1.° la serie $\Sigma |a_{ij}|$ (i diverso da j) è convergente: 2.° il prodotto $\Pi |a_{ii}|$ è convergente.

Quando queste condizioni sono soddisfatte si sa che il determinante infinito è convergente. Inoltre si dimostra che spostando le colonne e le linee in modo che gli elementi *diagonali* restino *diagonali*, e quindi i *non diagonali* restino *non diagonali*, si

ha ancora un determinante convergente avente lo stesso valore. È perciò che esso può chiamarsi *convergente assolutamente* (v. *Acta.* Vol. XVI, pagine 228-229). Inoltre il medesimo autore studia il prodotto di due determinanti *normali*, e trova che esso si esegue colla medesima legge con cui si esegue quello dei determinanti di ordine finito, e che inoltre dà luogo ad un altro determinante anche normale (p. 231).

§ 52. — Sui determinanti orlati. Teorema di Lepaige.

Abbiamo già in un altro paragrafo (v. § 12 fatto conoscere un teorema sullo sviluppo di un determinante orlato, cioè di un determinante ottenuto da un altro aggiungendo un certo numero di colonne e un certo numero di linee. Si fa lo sviluppo di un siffatto determinante ponendo in vista gli elementi delle linee e colonne aggiunte.

Ora è interessante far conoscere quest'altro teorema sugli stessi determinanti, trovato da Lepaige, *Bull. de la Soc. math.* Vol. VIII, p. 128.

Per fissare le idee e per semplicità supponiamo un determinante di 3.° ordine simmetrico

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a cui aggiungendo due linee e due colonne in modo da avere ancora un determinante simmetrico, si ha

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Consideriamo il reciproco di D, cioè

$$R = D^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

e moltiplichiamo D^2 per Δ, dopo avere aggiunto in D^2 colonne e linee in maniera da non alterarlo, come segue

$$D^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si ha allora

$$D^2\Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \Sigma A_{1i}x_i & \Sigma A_{1i}y_i \\ 0 & D & 0 & \Sigma A_{2i}x_i & \Sigma A_{2i}y_i \\ 0 & 0 & D & \Sigma A_{3i}x_i & \Sigma A_{3i}y_i \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= D \left\| \begin{matrix} \Sigma A_{1i}x_i & \Sigma A_{2i}x_i & \Sigma A_{3i}x_i \\ \Sigma A_{1i}y_i & \Sigma A_{2i}y_i & \Sigma A_{3i}y_i \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|.$$

Ed eseguendo il prodotto delle due matrici colla regola nota, si ha, sopprimendo un fattore comune D,

$$D\Delta = \begin{vmatrix} \Sigma A_{ij}x_i x_j, & \Sigma A_{ij}x_i y_j \\ \Sigma A_{ij}y_i x_j, & \Sigma A_{ij}y_i y_j \end{vmatrix}.$$

In generale si avrebbe un'espressione analoga per il prodotto

$$\Delta \,.\, D^{p-1}$$

se D è un determinante simmetrico, e p rappresenta il numero delle linee e colonne simili che si aggiungono a D per ottenere Δ. Il determinante con cui un tal prodotto viene espresso è di ordine p.

Questa proprietà è adoperata in questioni di geometria analitica. (V. p. es.: HESSE, *Vorl. über analytische Geom. des Raumes*, 3.ᵉ ediz., p. 179; CLEBSCH, *Geometrie.* Vol. I, 2.ª p., pag. 909.)

§ 53. — Valore massimo di un determinante. Ricerca di Hadamard.

Una quistione che non manca di interesse è la seguente:

Supponiamo che gli elementi di un determinante sieno tutti in valore assoluto inferiori ad una quantità a; quale sarà un limite superiore del valore assoluto del determinante stesso?

Sylvester, *Phil. Magaz.* t. XXXIV, p. 461, 1867.

Hadamard, *Bulletin des sciences math.* 1893, p. 240.

È evidente che un valore maggiore del limite superiore del valore del determinante sarà

$$n!\, a^n$$

che si otterrebbe se rendiamo positivi tutti i termini del determinante (mentre che nello sviluppo di un determinante vi sono sempre termini positivi e termini negativi) e poi in luogo di ciascuno elemento poniamo il suo limite superiore. È manifesto che un tal limite è troppo alto, perchè esso non può essere mai raggiunto dallo sviluppo del determinante.

Per porci da un punto di vista generale supponiamo che gli elementi sieno *complessi* qualunque.

Sia Δ un determinante formato cogli elementi dati, e Δ' quello formato nella stessa maniera coi

coniugati degli elementi; allora evidentemente Δ e Δ' saranno due quantità coniugate, per modo che il loro prodotto sarà il quadrato del modulo di Δ, e quindi in ogni caso una quantità reale positiva.

Consideriamo le prime p linee di Δ e le corrispondenti di Δ'. Il prodotto delle due siffatte matrici sarà la somma dei prodotti dei minori dell'una per i corrispondenti dell'altra, cioè sarà la somma dei prodotti dei moduli dei minori della prima matrice.

Se a_{ij} sono gli elementi di Δ e a_{ij}' quelli di Δ, il prodotto delle due matrici di n colonne e p linee sarà

$$P_p = | s_{ij} |$$

dove

$$s_{ij} = a_{i1}\, a'_{j1} + a_{i2}\, a'_{j2} + \ . \ . \ . + a_{in}\, a'_{jn}$$

ed è evidente che s_{ij} e s_{ji} sono coniugati e che gli elementi principali s_{ii} sono le somme dei quadrati dei moduli degli elementi contenuti in una linea di Δ.

Isoliamo in P_p la parte contenente per fattore l'ultimo elemento principale e si ha

$$P_p = s_{pp}\, P_{p-1} + Q_p$$

dove

$$Q_p = \begin{vmatrix} s_{11} & \ldots & s_{p-1} & s_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p-1,1} & \ldots & s_{p-1,p-1} & s_{p-1,p} \\ s_{p,1} & \ldots & s_{p,p-1} & 0 \end{vmatrix}$$

cioè Q_p è il determinante ricavato da P_p ponendo O al posto dell'ultimo elemento principale.

Il complemento di un elemento principale in Q_p (meno l'ultimo che è P_{p-1}) è un Q_{p-1}, ottenuto cioè facendo il prodotto delle due matrici di n colonne e di certe $p-1$ linee scelte in Δ e Δ'.

Consideriamo il reciproco di Q_p i cui elementi sieno S_{ij} e in esso il minore

$$\begin{vmatrix} S_{h,h} & S_{h,p} \\ S_{p,h} & S_{p,p} \end{vmatrix} \qquad h = 1, 2, \ldots p-1.$$

Questo sarà eguale a Q_p moltiplicato per il complemento dell'omologo di esso in Q_p, cioè per

$$P_{p-2}.$$

Intanto $S_{p,h}$ è coniugato a $S_{h,p}$, e inoltre

$$S_{h,h} = Q_{p-1}$$
$$S_{p,p} = P_{p-1},$$

onde si ha

$$Q_p P_{p-2} = Q_{p-1} P_{p-1} - |S_{p,h}|^2$$

intendendo con

$$|S_{p,h}|$$

il modulo di questa quantità.

Da questa formola appare subito che se Q_{p-1}, è una quantità *negativa* poichè le P sono quantità essenzialmente positive) anche Q_p è una quantità *negativa*. Ora $Q_2 = -|s_{12}|^2$ è effettivamente una

quantità negativa, dunque lo saranno $Q_3, Q_4, \ldots$ lo sarà infine anche Q_p.

Possiamo dunque conchiudere *che le Q_p sono tutte quantità negative.*

Inoltre le Q_p non possono essere zero che quando sono zero tutti gli elementi dell'ultima colonna.

È evidente che se Q_{p-1} è diversa da zero e quindi è una quantità essenzialmente negativa, non potrà Q_p essere zero.

Quindi se Q_p deve essere zero, deve essere certamente zero anche Q_{p-1}; ammettendo che Q_{p-1} non sia zero che quando tutti gli elementi

$$s_{1p} \; s_{2p} \; . \; . \; . \; s_{h-1,p} \; s_{h+1,p} \; . \; . \; . \; s_{p-1,p}$$

sono zero, ne viene che Q_p non può essere zero che quando tali elementi sono zero; cioè Q_p non può essere zero che quando sono zero tutti gli elementi dell'ultima colonna, meno $s_{h,p}$; ma h è un indice arbitrario; facendolo variare ne viene che, devono essere zero *tutti* gli elementi dell'ultima colonna, se lo stesso si verifica per Q_{p-1}. Ora per

$$Q_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

si verifica infatti che deve essere $s_{\,2} = 0$ (o ciò che è lo stesso $s_2 = 0$ essendo s_{21} il coniugato di s_{12}) perchè Q_2 sia zero, dunque resta dimostrato il teorema.

Ciò posto si può mostrare che P_p è *al più* eguale al prodotto dei suoi elementi principali.

In effetti dalla formola

$$P_p = s_{pp} P_{p-1} + Q_p ,$$

ammettendo che la proprietà si verifichi per P_{p-1}, e ricordando che Q_p è negativo, si vede che la stessa proprietà si verifica per P_p.

Per $P_2 = s_{11} s_{22} - | s_{12} |^2$ è evidente che

$$P_2 \leqq s_{11} s_{22}$$

cioè per $p = 2$ la proprietà è effettivamente verificata.

Inoltre perchè possa essere

$$P_p = s_{11} s_{22} \ldots s_{pp}$$

è necessario che Q_p sia zero, e inoltre che

$$P_{p-1} = s_{11} s_{22} \ldots s_{p-1,p-1}.$$

Ora ciò porta che tutti gli elementi *non principali* sieno zero.

Per $p = n$ si ha

$$| \Delta |^2 \leqq s_{11} s_{22} \ldots s_{n,n}.$$

Se dunque supponiamo che i moduli di tutti gli elementi del determinante sieno al massimo eguali ad 1, allora il massimo valore assoluto del determinante è $n^{\frac{n}{2}}$.

Perchè il determinante raggiunga tal valore è necessario che tutti gli elementi abbiano per modulo 1, e inoltre che sieno zero tutte le s_{ij} dove i, j sono indici differenti. Queste condizioni deter-

minano le a come elementi di un determinante detto da Sylvester *inversamente ortogonale.*

Siamo così condotti alla soluzione di questo problema: *costruire con elementi di modulo 1 il determinante massimo di un certo ordine.*

Di questo problema si occupò il SYLVESTER, loc. cit., ma i suoi risultati devono essere rettificati giovandosi delle osservazioni di HADAMARD, loc. cit., p. 243.

È utile la seguente osservazione: quando gli elementi sono in generale complessi, allora abbiamo visto che il massimo valore che può acquistare il modulo del determinante è $n^{\frac{n}{2}}$. Un determinante il cui modulo acquista effettivamente tal valore sarà in generale ad elementi complessi. Quando n è una potenza di 2, allora si può ottenere un determinante massimo ad elementi reali, che allora non potranno essere che i soli elementi $+1$ e -1. Per altri valori di n potrebbe essere che non esistano determinanti ad elementi reali che raggiungano il valore massimo $n^{\frac{n}{2}}$, ma in ogni caso si potrebbe proporsi questi due problemi che l'Hadamard enuncia alla fine del suo notevole lavoro che noi abbiamo qui riassunto:

1. per quali valori di n esistono determinanti ad elementi $+1$, -1 (reali) che raggiungano il valore $n^{\frac{n}{2}}$?

2. Come si costruirebbero per ogni n i determinanti ad elementi reali $(+1, -1)$ che pur non

raggiungendo il valore $n^{\frac{n}{2}}$, raggiungano il valore assoluto più elevato possibile?

§ 54. — Determinanti cubici e di specie superiore.

L'idea di considerare dei determinanti i cui elementi dipendano da più di due indici, si deve a Vandermonde come osserva il Günther nel suo Trattato più volte citato.

Ma il primo che abbia tentato qualche cosa di più preciso deve reputarsi il De Gasparis in un opuscolo separato pubblicato col pseudonimo di *Jean Blaise Grandpas.* (*Sur les déterminants dont les éléments ont plusieurs indices.* 25 settembre 1861.)

Due anni dopo comparve un lavoro di Dahlander a Stoccolma. (*Ofvers of K Akad. Förh*, 1863.)

Nel 1868 comparvero i lavori di Armenante (*Sui determinanti cubici.* Giorn. di Batt. Vol. VI, p. 175); Padova (Giorn. di Batt. Vol. VI, p. 182); Zehfuss (*Ueber eine Erweiterung des Begriffes der Determ.* Frankfürt, 1868); De Gasparis. (*Acc. delle scienze di Napoli.* Luglio 1868) Una esposizione dei risultati ottenuti si deve a Garbieri, (*Giorn. di Batt.* Vol. XV, p. 89, 1876; *Atti del r. Istituto Veneto.* Nov. 1877) e infine si può utilmente riscontrare il trattato sui determinanti di Günther. (Erlangen, 1877.)

Sui determinanti cubici e di specie superiore esistono poi i lavori più recenti di ZAJACZKOWSKI (1881) di GEGENBAUER, *Ueber Determ. höh. Ranges* (Denksch. Wiener Akad. Vol. XLIII, 2.ª part. pag. 17, 1882; Vol. XLVI, 2.ª part., p. 191, 1883; Vol. XLIX, 2.ª part., pag. 225 1885; Vol. L, 1.ª part., p. 145, 1885) e di SZUTS (Budapest, 1890).

Noi non vogliamo entrare in molti dettagli sulla teoria dei determinanti a più indici, ma solo esporremo le cose più fondamentali.

Immaginiamo n^3 elementi a_{ijk} dove gli indici i, j, h possono assumere i valori $1, 2, \ldots n$. Disponendo tali elementi in un cubo in modo analogo a quello che si fa per costruire una *matrice quadrata*, si ha ciò che può chiamarsi *una matrice cubica*.

Questa matrice potrà decomporsi in *tre* maniere diverse in n piani orizzontali o verticali, in ciascuno dei quali resta costruita una certa matrice quadrata.

In questa matrice cubica sono da considerarsi quattro diagonali; chiameremo principale quella sulla quale sono situati gli elementi aventi i tre indici eguali, cioè

$$a_{111}\, a_{222} \, \ldots \, a_{nnn}.$$

Formiamo il prodotto di tali n elementi, e poi permutiamo i secondi indici in tutti i modi possibili fra loro, e i terzi indici fra loro. Da questo termine abbiamo allora in tutto $n!\,n! = (n!)^2$ termini a ciascuno dei quali daremo il segno $+$ o il segno $-$ secondochè è pari o dispari la somma delle inversioni contenute nella permutazione dei secondi

indici, e di quelle contenute nella permutazione dei terzi indici.

La somma di tutti i termini così ottenuti la chiamiamo *lo sviluppo del determinante cubico.*

È evidente che in ogni termine dello sviluppo compariranno fattori due dei quali non appartengono mai allo stesso piano verticale od orizzontale, perchè per appartenere allo stesso piano dovrebbero avere eguali o i primi o i secondi o i terzi indici.

Una sostanziale differenza fra il caso dei determinanti ordinari, e quello dei cubici è questa, che mentre da una matrice quadrata non resta definito che un solo determinante, dalla matrice cubica possono invece restar definiti tre determinanti di valore diverso che sono quelli ottenuti se formiamo il sommatorio dei termini che si ricavano dal termine principale

$$a_{111} \quad a_{222} \; . \; . \; . \; a_{nnn}$$

lasciando fissi i primi indici, e permutando gli altri, ovvero lasciando fissi i secondi indici, ovvero lasciando fissi i terzi indici.

Per convincersi di questo basta considerare l'esempio semplicissimo di $n = 2$.

Il termine principale sarà

$$a_{111} \quad a_{222}$$

col segno positivo. Lasciando fissi i primi indici e permutando gli altri e adoperando la regola indicata si hanno i quattro termini

$$+ a_{111}\, a_{222} - a_{121}\, a_{212} - a_{112}\, a_{221} + a_{122}\, a_{211}.$$

Invece lasciando fissi i secondi indici ovvero i terzi si hanno termini in valore assoluto eguali a questi, ma con segni diversi. Si hanno rispettivamente i risultati

$$+ a_{111}\, a_{222} + a_{212}\, a_{121} - a_{112}\, a_{221} - a_{211}\, a_{122},$$

$$+ a_{111}\, a_{222} - a_{121}\, a_{212} + a_{221}\, a_{112} - a_{211}\, a_{122}.$$

Chiameremo *primo* determinante quello ottenuto colle permutazioni dei secondi e terzi indici; *secondo* determinante quello ottenuto colle permutazioni dei terzi e primi indici, e *terzo* determinante quello ottenuto colle permutazioni dei primi e secondi indici.

Ogni elemento a_{ijh} del determinante cubico appartiene ad un piano orizzontale e a due piani verticali fra loro perpendicolari, nello stesso modo che in un determinante ordinario ogni elemento appartiene ad una colonna e ad una linea. Tali piani chiamiamoli *strati*.

Per fissare le idee supponiamo che il primo indice rappresenti il numero d'ordine dello strato *orizzontale*, il secondo indice il numero d' ordine di uno dei due strati verticali che chiameremo *primo strato verticale*, e il terzo indice corrisponda al *secondo strato verticale*.

Se scambiamo fra loro due strati orizzontali il determinante definito facendo variare solo i secondi e terzi indici nel termine principale (*vedi la definizione data sopra*) *resta inalterato*.

Giacchè se i fattori di ciascun termine li disponiamo sempre in modo che i primi indici restino disposti in ordine naturale, verremo ad invertire

fra loro due elementi nella permutazione dei secondi indici, e così nella permutazione dei terzi indici.

Ora in una permutazione scambiando due elementi, si viene ad alterare il numero delle inversioni, di un numero dispari, quindi nel complesso delle due permutazioni dei secondi e terzi indici, il numero delle inversioni resta variato di un numero pari, e perciò il termine che si considera conserverà il medesimo segno.

Invece se scambiamo fra loro due piani verticali paralleli, allora si vengono a scambiare fra loro due elementi solo della permutazione dei secondi indici, ovvero solo in quella dei terzi indici, e quindi il termine cambia di segno; cioè

Se scambiamo fra loro due strati verticali paralleli il determinante definito al solito modo, muta di segno.

Come si vede esiste questa fondamentale differenza fra il caso dei determinanti ordinari e quello dei cubici; in questi esiste sempre una direzione di piani paralleli tali che scambiandone due di essi scelti comunque, il determinante resta inalterato. Si può fare che questa proprietà si verifichi per una qualunque delle tre diverse direzioni di piani, orizzontale e verticali, e ciò in corrispondenza ai tre diversi determinanti che si possono definire colla matrice cubica.

È evidente la seguente proprietà:

Ogni determinante cubico può comporsi come la somma di n! determinanti ordinarii.

In effetti stabiliamo una permutazione dei secondi indici in

$$a_{111}\, a_{222}\, \ldots\, a_{nnn}$$

e poi permutiamo i terzi indici in tutti i modi possibili. L'assieme di tutti i termini che si vengono ad ottenere sarà col segno + o col segno —, un determinante ordinario. Il teorema resta così dimostrato.

Un'altra proprietà, che può poi dare in un'altra maniera la rappresentazione di un determinante cubico mediante determinanti ordinarii, è la seguente:

Il prodotto di due determinanti ordinarii si può esprimere con un determinante cubico.

In effetti se a_{ri}, b_{sj} sono gli elementi dei due determinanti dati, l' elemento generale del prodotto è

$$a_{r1}\, b_{s1} + a_{r2}\, b_{s2} + \ldots + a_{rn}\, b_{sn}.$$

Tal prodotto, colla regola di scomposizione di un determinante ad elementi polinomii, si scompone in $n!$ determinanti i quali danno insieme il determinante cubico il cui termine principale è

$$(a_{11}\, b_{11})\ (a_{22}\, b_{22})\ \ldots\ (a_{nn}\, b_{nn})$$

e un termine generale è

$$(a_{1i_1}\, b_{1j_1})\ (a_{2i_2}\, b_{2j_2})\ \ldots\ (a_{ni_n}\, b_{nj_n})$$

essendo

$$\begin{matrix} i_1\ i_2\ \ldots\ i_n \\ j_1\ j_2\ \ldots\ j_n \end{matrix}$$

due permutazioni degli indici 1, 2, ... n.

Il determinante cubico così formato ha per ele-

mento generale

$$a_{ki}\ b_{kj}$$

i tre indici $k\ i\ j$ variando da 1 ad n.

Eseguendo il prodotto dei due determinanti dati in uno degli altri tre modi possibili, si hanno sempre determinanti cubici i cui elementi sono rispettivamente

$$a_{ki}\ b_{jk}$$
$$a_{ik}\ b_{kj}$$
$$a_{ik}\ b_{jk}.$$

Questo teorema dà il mezzo di esprimere *simbolicamente* un determinante cubico come il prodotto di *due* determinanti ordinarii.

Supponiamo che le a e le b sieno dei simboli che abbiano significato di quantità solo quando si trovino riuniti nelle combinazioni

$$a_{ki}\ b_{kj}$$

cioè quando si abbia il prodotto di due di esse i cui primi indici sieno eguali. L'elemento generale di un dato determinante cubico

$$a_{kij}$$

può allora porsi simbolicamente eguale al prodotto di quelle a e b, e viceversa dato il prodotto simbolico $a_{ki}\,b_{kj}$ ad esso non può che corrispondere un unico elemento del determinante cubico dato.

Resta dunque provato che questo può esprimersi simbolicamente come il prodotto dei due determi-

nanti ordinarii, i quali poi sono solo simbolici e non effettivi, e acquistano significato effettivo solo quando si moltiplicano fra loro, tenendo conto però che il loro prodotto si esegue secondo la regola ordinaria.

Se da un determinante cubico si sopprimono tutti gli elementi dei tre piani che si incontrano in un elemento a_{kij} si ha un nuovo determinante cubico che potrà chiamarsi il minore complemento dell'elemento a_{kij} e si può indicare con A_{kij}.

Moltiplicandolo per $(-1)^{i+j}$ supposto che si tratti del *primo* determinante definito dalla matrice cubica, si ha ciò che si chiama il *complemento algebrico* di quell'elemento.

Si può far vedere che, come pei determinanti ordinari, *il valore del determinante cubico è eguale alla somma dei prodotti degli elementi di uno strato per i loro rispettivi complementi algebrici.*

La dimostrazione di questo si farebbe in modo simile a quello che si fa pei determinanti ordinarii.

Passiamo ora alla moltiplicazione dei determinanti cubici.

Consideriamo il prodotto di un determinante cubico $| a_{kij} |$ per un determinante ordinario $| b_{rs} |$.

Il determinante cubico lo possiamo considerare come la somma algebrica di $n!$ determinanti ordinari, ognuno dei quali è

$$\pm \sum_j \pm a_{1 i_1 j_1} \, a_{2 i_2 j_2} \, \ldots \, a_{n i_n j_n}$$

dove il sommatorio si estende a tutte le permutazioni degli indici $j \, j_2 \ldots j_n$, e inoltre $i_1 \, i_2 \ldots i_n$, rappresentano una permutazione degli indici $1, 2 \ldots n$,

e il segno di tutto il sommatorio è $+$ o $-$ secondochè la permutazione delle i è di classe pari o dispari.

L'elemento generale di tal determinante è

$$a_{k i_k r}$$

dove variano k e j; gli elementi cui corrisponde il medesimo k formano quelli di una linea, e quelli col medesimo j formano gli elementi di una colonna. Il prodotto di un tal determinante per b_{rs} avrà per elemento generale

$$c_{kr} = \sum_s a_{k i_k s}\, b_{rs}.$$

Se si muta la permutazione $i_1 i_2 \dots i_n$ dei numeri $1, 2, \dots n$, e si fa la somma algebrica di tutti i risultati si ha il prodotto dei due determinanti dati. Ora se noi consideriamo il determinante cubico il cui elemento generale sia

$$\alpha_{kir} = \sum_s a_{kis}\, b_{rs}$$

e se scomponiamo tal determinante cubico in somma di determinanti ordinarii, si vede che otteniamo esattamente la somma dei determinanti i cui elementi sono le c; per un k fisso la matrice quadrata delle α_{kir} (dove variino solo i, r) si ottiene dalle matrici quadrate delle a_{kis}, b_{rs} colla regola nota per il prodotto di queste due matrici quadrate, quindi possiamo dire: *per ottenere il prodotto del determinante cubico e del determinante ordinario si forma un determinante cubico i cui* STRATI *sono formati moltiplicando colla regola so-*

lita le matrici quadrate che formano gli strati del determinante cubico dato, per il determinante moltiplicatore. Vedi ARMENANTE, op. cit., p. 181.)

Si potrebbe ora passare all'esposizione di certi teoremi di DE GASPARIS e di PADOVA, ma non vogliamo dilungarci su questo argomento pel quale si possono riscontrare le già citate opere.

§ 55. — DETERMINANTI NULLI E MATRICI NULLE. CARATTERISTICA DI UNA MATRICE.

Diremo che una matrice di n linee e m colonne $(m > n)$ è nulla quando sono nulli tutti i determinanti in quella matrice.

In una matrice quadrata o rettangolare possono essere zero tutti i determinanti di ordine n, tutti quelli di ordine $n-1, n-2, \ldots$ Sia p l'ordine dei determinanti contenuti nella matrice e che *non* sono *tutti* zero; cioè supponiamo che tutti i determinanti di ordine $p+1$, e quindi anche di ordine superiore sieno tutti zero; e che fra tutti quelli di ordine p ve ne sia *almeno* uno diverso da zero. Il numero p si chiama *caratteristica della matrice data.* Evidentemente un determinante nullo o una matrice nulla ha *al massimo* per caratteristica $n-1$.

Vogliamo trovare quali sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè una matrice abbia per caratteristica $n-1$, cioè perchè sia nulla senza che sieno nulli tutti i determinanti di ordine $n-1$. Noi verremo a stabilire il reciproco di un teorema

dimostrato nei primi paragrafi. Noi sappiamo cioè che, se gli elementi di una linea in una matrice rettangolare sono le medesime combinazioni lineari degli elementi delle linee parallele (il numero delle linee si suppone minore del numero delle colonne) allora tutti i determinanti di ordine n contenuti nella matrice sono evidentemente nulli, e quindi la matrice è nulla. Vogliamo ora dimostrare che, reciprocamente, se la matrice è nulla, gli elementi di una linea devono essere le stesse combinazioni lineari di quelli delle linee parallele. Cominciamo col supporre che almeno uno dei minori di ordine $n-1$ sia diverso da zero; senza togliere generalità possiamo supporre che tal minore sia quello delle prime $n-1$ linee e prime $n-1$ colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Se la matrice è nulla allora saranno nulli i determinanti ottenuti da questo aggiungendo una colonna e una linea, cioè tutti i determinanti della forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,r} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,r} \end{vmatrix}$$

che sviluppati secondo gli elementi dell'ultima co-

lonna, e indicando con

$$A_1 \quad A_2 \ . \ . \ . \ A_m$$

i complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna, cioè i determinanti di ordine $n-1$ con segni opportuni contenuti nelle prime n colonne della matrice data, danno, per qualunque valore dell'indice r,

$$a_{1r} A_1 + a_{2r} A_2 + \ . \ . \ . + a_{nr} A_n = 0.$$

Questa relazione, come abbiamo detto, vale per qualunque valore dell'indice ν che può essere $1, 2, \ldots m$; perchè se $\nu \leqq n-1$ allora il determinante precedente è zero perchè ha due colonne eguali, e se $\nu > n-1$, allora è zero per l'ipotesi fatta.

La precedente relazione dimostra che *se la matrice è nulla ed ha per caratteristica $n-1$, fra gli elementi di una colonna esiste sempre la medesima relazione lineare omogenea.*

Ora vediamo come si può generalizzare questo teorema *al caso che si supponga la matrice non di caratteristica $n-1$, ma in generale di caratteristica p.*

Allora almeno un minore di ordine p sarà diverso da zero e sia

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & . \ . \ . & a_{1p} \\ . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . \\ a_{p1} & . \ . \ . & a_{pp} \end{vmatrix}.$$

Aggiungiamo una colonna e una linea qualun-

que e formiamo il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & a_{pr} \\ a_{s1} & \dots & a_{sp} & a_{sr} \end{vmatrix}$$

che sarà identicamente zero *qualunque sieno gli indici* r, s. Sviluppando quindi gli elementi dell'ultima colonna si ha la relazione

$$a_{1r} A_{1s} + \dots + a_{pr} A_{ps} + a_{sr} A = 0$$

indicando con $A_{1s} \dots A_{ps}$ i minori, con segni opportuni, di ordine p ottenuti da A sopprimendo le linee $1, 2, \dots p$, e sostituendovi la linea s^{ma}.

Facendo variare s da $p+1$ ad n e sommando tutte le relazioni ottenute si ha

$$\begin{aligned} & a_{1r} \quad (A_{1p+1} + \dots + A_{1n}) + \\ + & a_{2r} \quad (A_{2p+1} + \dots + A_{2n}) + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + & a_{pr} \quad (A_{pp+1} + \dots + A_{pn}) + \\ + & a_{p+1,r} A + a_{p+2,r} A + \dots + a_{nr} A = 0 \end{aligned}$$

la quale vale per qualunque $r = 1, 2, \dots m$, cioè è una relazione lineare omogenea a coefficienti *fissi* fra gli elementi di una qualunque colonna. Con ciò il teorema resta dimostrato in generale.

Come casi particolari da questi teoremi sulle matrici nulle si ricavano evidentemente gli analoghi per i determinanti nulli.

Dalla dimostrazione del teorema risulta questa conseguenza.

Uno dei determinanti di ordine p, *non nullo* chiamiamolo *determinante principale* e indichiamolo, come sopra, con A.

Perchè la matrice sia nulla e abbia per caratteristica p basta supporre che sieno zero tutti i determinanti ottenuti da A coll'aggiunzione di una linea e una colonna.

L'annullarsi di tutti gli altri determinanti di ordine $p+1$ è una conseguenza dell'annullarsi di questi indicati; infatti si abbia un qualunque determinante di ordine $p+1$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & \ldots & a_{r_1 s_{p+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r_{p+1} s_1} & \ldots & a_{r_{p+1} s_{p+1}} \end{vmatrix}.$$

Moltiplichiamo ogni elemento per A, e teniamo conto della relazione generale trovata.

Si ha

$$\ldots +1 = \begin{vmatrix} -a_{1s_1} A_{1r_1} - \ldots - a_{ps_1} A_{pr_1}, \ldots, -a_{1s_{p+1}} A_{1r_1} - \ldots - a_{ps_{p+1}} A_{pr_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{1s_1} A_{1r_{p+1}} - \ldots - a_{ps_1} A_{pr_{p+1}}, \ldots, -a_{1s_{p+1}} A_{1r_{p+1}} - \ldots - a_{ps_{p+1}} A_{pr_{p+1}} \end{vmatrix}$$

Ogni elemento di tal determinante è una somma di p termini, mentre il determinante è di ordine $p+1$; scindendo questo determinante ad elementi polinomii, in tanti altri ad elementi monomii, si vede che ciascuno di questi risulterà sempre *almeno* con due colonne i cui elementi sono rispettivamente quelli dell'una equimultipli di quelli corrispondenti dell'altra, e quindi ciascuno di tali

determinanti è zero; di qui si ricava (essendo A diverso da zero) che $\Delta = 0$, giusta l'assunto.

Fermandoci a considerare quel numero introdotto come *caratteristica di una matrice* ci sarà facile dimostrare di tal numero una proprietà fondamentale che serve in certo modo a giustificarne l'importanza.

Data una matrice diremo che un'altra è *derivata* da essa quando si ottiene da essa con una o più delle seguenti operazioni elementari (CAPELLI-GARBIERI, *Analisi*. 1886):

1. Scambiare due linee o due colonne.
2. Moltiplicare gli elementi di una linea o colonna per un qualunque numero.
3. Aggiungere agli elementi di una linea o colonna quelli di una linea parallela moltiplicati per un numero qualunque.

Se si trattasse di una matrice quadrata, queste operazioni non possono che *al massimo* moltiplicare per un numero il determinante definito da quella matrice.

Ora è notevole il seguente teorema:

Due matrici derivate l'una dall'altra hanno la medesima caratteristica.

In particolare se da un determinante colle operazioni indicate ne ottengo un'altro del medesimo ordine, i due determinanti avranno la stessa caratteristica.

È evidente il teorema nel caso delle due prime operazioni. Dimostriamo che esso si verifica anche per la terza operazione; giacchè supponiamo di avere ottenuto dalla matrice data un'altra ma-

trice aggiungendo agli elementi di una linea o colonna, quelli di una linea parallela moltiplicati per λ. Allora un minore della seconda matrice o sarà eguale ad un minore dello stesso ordine della prima matrice (se alla sua formazione non concorre la linea modificata), ovvero sarà decomponibile nella forma

$$A + \lambda B$$

dove $A\, B$ sono due minori dello stesso ordine della primitiva matrice. Di qui risulta subito, che se non tutti i minori di ordine k della prima matrice sono eguali a zero, non lo saranno tutti quelli della seconda matrice, e se sono zero tutti i minori di ordine $k+1$ della prima matrice, lo saranno tutti quelli della seconda.

Donde si ha la dimostrazione del teorema.

§ 56. — Equazioni lineari.

Si abbia un sistema di m equazioni fra n incognite

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = y_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

Si può sempre supporre che m sia maggiore di n, perchè se non lo fosse potrebbe immaginarsi che si aggiungano a questo sistema di equa-

zioni tante altre identiche, cioè con coefficienti zero e con termini noti eguali a zero.

Noi ci proponiamo di esaminare in che modo i valori delle incognite $x_1 \ldots x_2$ sono determinate o no da tali equazioni.

Chiameremo matrice dei coefficienti la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \qquad (2)$$

Sia p la caratteristica di questa matrice (vedi § precedente) e sia, per fissare le idee,

$$A = \left| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{matrix} \right| \qquad (p \leqq n)$$

uno dei determinanti di ordine p *diverso da zero*, contenuto nella matrice.

Formiamo i determinanti

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} & y_p \\ a_{r1} & \ldots & a_{rp} & y_r \end{matrix} \right| = \Delta_r .$$

Per un $r \leqq p$ tali determinanti sono evidentemente zero; per un $r > p$ essi invece possono avere valori qualunque.

Incominciamo col far vedere che *perchè le equazioni date non sieno fra loro contradditorie, cioè,*

come si dice, sieno fra loro compatibili, è necessario che tutti i Δ_r sieno zero.

Le equazioni date scriviamole

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1p}\, x_p = y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + \ldots + a_{mp}\, x_p = y'_m \end{array}\right\} \quad (3)$$

ponendo

$$\begin{array}{l} y'_1 = y_1 - a_{1p+1}\, x_{p+1} - \ldots - a_{1n}\, x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_m = y_m - a_{mp+1}\, x_{p+1} - \ldots - a_{mn}\, x_n\,. \end{array}$$

Se in Δ_r in luogo di $y_1 \ldots y_m$ poniamo $y_1' \ldots y_m'$ otteniamo determinanti le cui ultime colonne sono ad elementi polinomii; scomponendoli colla regola nota si ha per primo termine lo stesso Δ_r da cui si è partiti, e poi altri termini che sono, a meno di fattori, determinanti di ordine $p+1$ scelti nella matrice fondamentale, e quindi, per l'ipotesi fatta, sono zero. Si ricava quindi che i Δ_r restano inalterati sostituendo alle y le y'.

Consideriamo le prime p equazioni fra le (3) e la r^{ma}; chiamiamo $A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \ldots A_p^{(r)}, A$, i complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna in Δ_r; e moltiplichiamo rispettivamente le $p+1$ equazioni indicate per $A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \ldots A_p^{(r)}, A$, e sommiamole. È facile riconoscere che il coefficiente di x^s riesce zero, e quindi resta solo al secondo membro il determinante che si ricava da Δ_r sostituendo le y' alle y, il qual determinante, come

abbiamo detto, è eguale a Δ_r. Dunque deve essere $\Delta_r = 0$ qualunque sia l'indice r.

Di qui si ricava ancora che il determinante Δ'_r, ottenuto sostituendo in Δ_r alle y le y', *è anche zero qualunque sieno i valori*

$$x_{p+1} \dots x_n.$$

Per i teoremi sui determinanti nulli (v. paragrafo precedente) gli elementi dell'ultima linea in Δ'_r devono essere le medesime combinazioni lineari omogenee degli elementi delle linee parallele, cioè, *qualunque sieno le* $x_{p+1} \dots x_n$, *deve aversi per qualunque* $r = p + 1, \dots m$:

$$\begin{array}{l}
a_{r1} = \alpha\, a_{11} + \beta\, a_{21} + \dots + \mu\, a_{p1} \\
a_{r2} = \alpha\, a_{12} + \beta\, a_{22} + \dots + \mu\, a_{p2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{rp} = \alpha\, a_{1p} + \beta\, a_{2p} + \dots + \mu\, a_{pp} \\
y'_r = \alpha\, y'_1 + \beta\, y'_2 + \dots + \mu\, y'_p\,.
\end{array}$$

In quest'ultima relazione sostituiamo alle y' i loro valori, e osserviamo che quella relazione deve sussistere qualunque sieno i valori assegnati a $x_{p+1} \dots x_n$. Con ciò l'ultima relazione si scinde nelle seguenti altre:

$$\begin{array}{l}
y_r = \alpha\, y_1 + \beta\, y_2 + \dots + \mu\, y_p \\
a_{rp+1} = \alpha\, a_{1p+1} + \beta\, a_{2,p+1} + \dots + \mu\, a_{pp+1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{rn} = \alpha\, a_{1n} + \beta\, a_{2,n} + \dots + \mu\, a_{pn}.
\end{array}$$

Tutte queste relazioni mostrano che se molti-

plichiamo le prime p fra le (1) rispettivamente per $\alpha, \beta \dots \mu$ e sommiamo, abbiamo esattamente la equazione r^{ma} fra le (1); cioè tale equazione r^{ma} è una conseguenza delle prime p. Potendo r essere eguale a $p+1 \dots m$ si ha:

Se tutti i Δ_r sono zero, allora il sistema delle m equazioni date si riduce al sistema delle prime p; cioè le ultime $m-p$ non sono che combinazioni lineari delle prime p di esse.

Occupiamoci allora solo delle prime p equazioni messe sotto la forma (3).

Moltiplichiamole rispettivamente per i complementi algebrici degli elementi della i^{ma} colonna nel determinante A, e sommiamole.

I coefficienti di $x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p$ risultano zero perchè risultano la somma di prodotti degli elementi di una colonna di A per i complementi algebrici degli elementi di una colonna parallela. Il coefficiente di x_i risulta eguale al determinante A, e si ha quindi

$$A x_i = A^{(i)}$$

dove $A^{(i)}$ è il determinante ottenuto da A sostituendo agli elementi della colonna i^{ma} gli elementi $y'_1 \dots y'_p$.

Essendo A diverso da zero, da questa formola si ha

$$x_i = \frac{A^{(i)}}{A} \tag{4}$$

Fermiamoci un momento a considerare questo risultato. Se $p = n$, allora il secondo membro è

una quantità che non dipende più dalle x, e quindi con questa formola si hanno valori *finiti* per le $x_1 \dots x_p$.

Inoltre allora il sistema non ammette che *una* soluzione perchè le (4 forniscono per x_i un unico valore.

Se $p < n$ allora il secondo membro è un'espressione lineare in $x_{p+1} \dots x_n$. Assegnando a tali variabili dei valori finiti qualunque, si hanno valori finiti e determinati per le $x_1 \dots x_p$; il sistema delle equazioni date non determina allora in modo unico le incognite, ma ad $n - p$ di esse possono assegnarsi valori arbitrari, e le altre p restano univocamente determinate. Le soluzioni del sistema sono allora in numero infinito, e propriamente $n - p$ volte infinito, perchè ad $n - p$ incognite possiamo assegnare valori arbitrari. Qualunque soluzione del sistema non può essere che compresa fra quelle ricavate in questa maniera, perchè, supposto che

$$x_1 = a_1, \dots, x_p = a_p, x_{p+1} = a_{p+1}, \dots, x_n = a_n$$

sia una soluzione del sistema dato, essa dovrà intanto soddisfare alle prime p equazioni messe sotto la forma (3) e anche alle (4), nelle quali posto $x_{p+1} = a_{p+1}, \dots x_n = a_n$ non può che aversi per x_i il solo valore a_i, perchè le (4) forniscono per x_i $(i = 1, \dots p)$ un *unico* valore quando sieno fissati $x_{p+1} \dots x_n$.

Come si vede, basta supporre tutti i Δ_r eguali a zero perchè si possa dire che esiste sempre *almeno* una soluzione del sistema; d'altra parte la condizione $\Delta_r = 0$ è anche necessaria perchè le

equazioni sieno compatibili, cioè perchè sia possibile almeno una soluzione. *Dunque le condizioni* $\Delta_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots m)$ *sono necessarie e sufficienti per la compatibilità delle equazioni.*

Possiamo a queste condizioni assegnare una forma più concisa ed elegante. (Capelli, *Rivista di matematica*, v. II, 1892.)

Consideriamo la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & y_m \end{matrix} \right\| = (B).$$

Questa matrice non può avere una caratteristica inferiore a p, perchè almeno è diverso da zero il determinante delle prime p linee e colonne, cioè il determinante A. Inoltre essendo zero tutti i Δ_r, saranno zero tutti i determinanti formati aggiungendo ad A l'ultima colonna, e una qualunque linea, ed essendo poi di caratteristica p la matrice delle a, saranno anche zero tutti i determinanti ottenuti aggiungendo ad A una qualunque altra colonna e qualunque altra linea. Possiamo quindi dire che la precedente matrice è di caratteristica p, e d'altra parte, se essa è di caratteristica p è evidente che tutti i Δ_r sono zero perchè sono determinanti di ordine $p + 1$. Possiamo dunque conchiudere: *perchè le equazioni date sieno compatibili, cioè ammettano una o più soluzioni, è necessario e sufficiente che la matrice dei coefficienti e la matrice* (B) *abbiano la stessa caratteristica.*

Se questa condizione è soddisfatta, abbiamo visto che il sistema di m equazioni si riduce ad un

sistema di sole p equazioni, e le altre $m - p$ sono dipendenti da queste. Le p equazioni sono certamente *indipendenti*, cioè fra esse non esiste alcuna relazione lineare omogenea, perchè altrimenti fra gli elementi delle colonne di A sussisterebbe una medesima relazione lineare omogenea, e A sarebbe zero contro l'ipotesi.

Possiamo quindi dire:

La caratteristica p della matrice del sistema rappresenta il numero massimo di equazioni fra loro indipendenti contenute nel sistema dato.

È utile notare ora il caso speciale in cui il numero delle equazioni è eguale a quello delle incognite, $m = n$.

Se allora il determinante dei coefficienti è diverso da zero, la caratteristica p sarà eguale ad n, e il sistema ammetterà sempre una sola soluzione; se invece il determinante dei coefficienti è zero, e ha per caratteristica p, ed è anche p la caratteristica della matrice formata aggiungendo alla matrice del determinante dei coefficienti, la colonna dei secondi membri delle equazioni date, queste sono compatibili, si riducono a sole p, e ammettono infinite soluzioni (∞^{n-p}).

Se $m = n + 1$, cioè il numero delle equazioni supera di un'unità quello delle incognite, allora la matrice (B) diventa quella di un determinante di ordine $n + 1$. La matrice dei coefficienti contiene determinanti al massimo di ordine n; quindi per la coesistenza delle $n + 1$ equazioni la matrice (B) deve avere una caratteristica minore di $n + 1$, e perciò il determinante di ordine $n + 1$ deve essere zero, cioè:

Per la coesistenza di $n+1$ equazioni fra n incognite il determinante dei coefficienti e dei termini noti deve essere zero.

Consideriamo ora il caso in cui sieno zero tutti i secondi membri delle equazioni date, cioè che sieno date m equazioni lineari della forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + \dots + a_{mn}\, x_n = 0 \end{array}\right\}. \qquad (5)$$

Tali equazioni si sogliono chiamare *omogenee.*

Allora i determinanti Δ_r sopra considerati sono certamente tutti zero, e quindi esiste sempre almeno *una* soluzione del sistema. Ciò corrisponde al fatto che ci sarà sempre almeno la soluzione

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \dots x_n = 0.$$

Dalla teoria precedente risulta ancora che se la caratteristica della matrice dei coefficienti è $p = n$ allora esiste *una sola* soluzione, la quale quindi non può essere che quella ora indicata; quindi possiamo conchiudere:

Perchè un sistema di equazioni omogenee ammetta una soluzione diversa dalla soluzione evidente $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ è necessario che la caratteristica della matrice dei coefficienti sia minore di n, cioè del numero delle incognite.

È evidente che la caratteristica della matrice non può essere maggiore nè di m nè di n, e al massimo potrà essere eguale al minore di tali due numeri. Se $m < n$ allora, poichè certamente la ca-

ratteristica p sarà minore di n, vi saranno certamente valori non tutti nulli delle incognite che soddisfano tutte le equazioni.

Per $m = n$ si ha:

Perchè un sistema di n equazioni lineari omogenee ad n incognite sia soddisfatto da valori non tutti nulli delle incognite, deve essere zero il determinante del sistema.

In un siffatto sistema il massimo valore della caratteristica p può dunque essere $n-1$. Dalla teoria generale risulta che allora vi è una semplice infinità $(n-(n-1)=1)$ di valori delle x che soddisfanno le equazioni, e che inoltre $n-1$ equazioni sono indipendenti e l' ultima è conseguenza delle prime.

Un minore di ordine $n-1$ e diverso da zero sia quello delle prime $n-1$ colonne e linee; allora sono indipendenti le $n-1$ equazioni

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} \quad x_1 + \ldots + a_{1n} \quad x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,1}\, x_1 + \ldots + a_{n-1,n}\, x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Chiamiamo

$$A_{n1},\ A_{n2},\ \ldots,\ A_{nn}$$

i complementi algebrici degli elementi dell'ultima linea nel determinante di ordine n delle a.

Tali complementi algebrici non sono altro che i determinanti di ordine $n-1$ contenuti nella matrice dei coefficienti delle (6).

Per le proprietà dei determinanti è evidente

che ponendo in luogo delle x nelle (6) le quantità

$$\rho A_{n1}, \ \rho A_{n2}, \ \ldots \ \rho A_{nn}$$

essendo ρ una qualunque quantità, le (6) restano tutte identicamente soddisfatte. Tali quantità sono perciò le soluzioni del sistema, in numero semplicemente infinito.

Dunque:

Se si hanno $n-1$ *equazioni lineari omogenee fra n incognite, con matrice diversa da zero (v. paragrafo precedente), le incognite sono proporzionali ai minori di ordine* $n-1$ *contenuti in tale matrice.*

Dall'osservazione testè fatta che la caratteristica p non può superare il minore dei due numeri m e n, e ricordando che p rappresenta proprio il numero delle equazioni lineari fra loro indipendenti, si ha:

Non possono darsi piu di n equazioni lineari omogenee fra loro indipendenti fra n incognite.

Il problema che abbiamo trattato in questo capitolo sulla risoluzione delle equazioni lineari è storicamente famoso massime per la teoria dei determinanti, come quello che in certo modo ha dato origine al concetto stesso dei determinanti.

La formola (4) si chiama *la formola di Cramer* perchè in certo modo si può ritenere come data da quell'autore in un'opera celebre ai suoi tempi, (Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.* Genève 1750.) Il problema, insieme all' altro dell' eliminazione a cui è assai affine, fu trattato da Eulero (*Nouvelle methode d' éliminer les quantités inconnues des equations.*

Acc. di Berlino, 1764.) ; Bezout (*Acad. de Paris*, 1764; *Théorie générale des équations*, Paris 1783.); Vandermonde (*Mémoire sur l'élimination*, Acad. de Paris, 1772. II partie, p. 516.); Laplace (*Ac. de Paris*. 1772, II partie, p. 294).

L'introduzione del concetto di *caratteristica*, col quale si acquista tanta generalità ed eleganza nella trattazione del problema, è di data recente. Si può vedere a questo proposito la nota di Rouché, *(Comptes Rendus de Paris*, 1875) e più recentemente ancora la nota di Capelli *(Rivista di mat.* 1892). V. anche i pregevoli trattati di algebra di Cesàro (Torino, 1894) e Capelli (Napoli, 1895), e la nota di D' Ovidio. *(Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari.* Acc. di Torino, Vol. XII, 1877).

Si possono adoperare i determinanti per la risoluzione di un sistema d'equazioni non più lineari. Per un sistema di $n-1$ equazioni lineari e una quadratica si può vedere.

Baur, *Auflösung eines Systems von Gleich., worunter eine quadrat., die and. linear.* (Zeitsch. f. Math. u Phys Vol. XIV, pag. 129).

Versluys, *Applications des déterm. à l'algèbre etc.* (Archiv f. Math. u. Phys. Vol. LIII, p. 138.); e per la risoluzione di un sistema di $n-2$ equazioni lineari e 2 quadratiche si vegga

Gundelfinger, *Aufl. eines Syst. etc.* (Zeitsch. f. Math. und Phys. Vol. XVIII, pag. 543.)

§ 57. — Risultante di due equazioni. Discriminante di un'equazione.

La *risultante* di due equazioni è una funzione intera razionale nei coefficienti delle due equazioni e tale che il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè le due equazioni abbiano una radice comune.

La costruzione della risultante fu fatta da Eulero (*Mem. di Berlino*, 1748, pag. 234; 1764, pagina 96), Bezout (*Mém. de Paris*, 1764, p. 298), Lagrange (*Mem. di Berlino*, 1769, pag. 303).

Jacobi adoperò a questo scopo i determinanti. (*Crelle*. Vol. XV, pag. 101 (1835).) Sono da notarsi poi ancora:

Sylvester (*Phil. Magaz.*, 1840; *Phil. Trans.*, 1853, pag. 516).

Richelot (*Crelle*. Vol. XXI, pag. 226).

Hesse (*Crelle*. Vol. XXVII, pag. 1).

Rosenhain (*Crelle*. Vol. XXVIII, pagina 268; Vol. XXX, pag. 157).

Hermite (*Crelle*. Vol. LII, pag. 47).

Cayley (*Phil. Trans.*, 1857; *Crelle*. Vol. LIII, pag. 366; *Crelle*. Vol. LX, pag. 373).

Brioschi, *Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations* (*Crelle*, Vol. LIII, pagina 372, 1857.)

Borchardt (*Crelle*. Vol. LIII, pag. 367; Volume LVII, pag. 112; pag. 183; *Berl. Monatsb.*, 1859, pag. 376).

FAÀ DI BRUNO, *Note sur un théorème de M. Brioschi.* (*Crelle.* Vol. LIV, pag. 283, 1857.)

KRONECKER (*Berl. Monatsb.,* 1865, pag. 690; 1881).

CLEBSCH, *Ueber die Elimination aus zwei Gleich. 3. Grades.* (*Crelle.* Vol. LXIV, pag. 95, 1865.)

BALTZER (*Determinanten*, § 11; *Leipz. Berichte*, 1873, pag. 530).

DARBOUX (*Bulletin des sciences math.*, 1876, pagina 56; 1877, pag. 54).

HIOUX, *Ann. École norm.* Vol. X-XI (2.e série), 1881-82.

IGEL, *Einige Sätze und Beweise zur Theorie der Resultante.* (Sitzungsberich. Akad. Wien. Volume LXXVI, 2.e p., pag. 145, 1877.)

LEMONNIER (*Ann. École norm.* Vol. VII (2.e série), pag. 77, 151, 1878).

STEPHANOS, *Mém. sur l'élimination.* (Annales de l'École normale, 1884, pag. 328 — v. pag. 376.)

SCHREIBNER (*Leipzig. Berichte*, 1888).

STAHL, *Ueber eine neue Darst. der Resultanten zweier Formen gleicher Ord.* (Math. Ann. Volume XXXV, pag. 395.)

GARBIERI (*Giorn. di Batt.* Vol. XXX, *Accad. Gioenia in Catania.* Vol. IV, serie IV, 1893).

MEYER, *Ueber die Structur der Discr. und Result. von binären Formen.* (Acta math. Vol. XIX, pag. 385, 1895.)

LÜROTH (*Zeits. f. Math. und Phys.* Vol. XL, 1895).

NOETHER (*Erlang. Berichte*, 1895).

NETTO, *Zur Theorie der Resultanten. Crelle.* Vol. CXVI, pag. 33, 1896.)

È importante lo studio della risultante dal punto di vista della teoria degli *invarianti*, e la espressione di essa mediante gli invarianti fondamentali del sistema delle due forme algebriche date. Sono moltissimi i lavori fatti in questo indirizzo, ma noi non possiamo entrare nella loro trattazione.

Ci limiteremo a studiare il risultante dal punto di vista dei determinanti.

Sono varie le forme del determinante che può rappresentare la risultante di due equazioni; ciò dipende dai diversi metodi che si possono seguire; così il metodo di Bezout dà luogo ad un determinante di ordine n (se n è il maggiore fra i gradi delle due equazioni date), e il metodo di Eulero, che fa giungere allo stesso risultato cui si giunge col cosiddetto metodo *dialitico* di Sylvester, dà invece un determinante di ordine $m + n$ se m, n sono i gradi delle due equazioni.

Sieno

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$
$$\psi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0$$

le due equazioni date.

Moltiplichiamo la prima per

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots\ x,\ 1$$

e la seconda per

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ x,\ 1.$$

Abbiamo in tutto $n + m$ equazioni che debbono coesistere se le due equazioni date sono soddisfatte da una medesima radice x. Le $n + m$ equazioni

sono lineari non omogenee in

$$x^{n+m-1},\ x^{n+m-2},\ \ldots\ x^2,\ x,$$

che sono in numero di $n + m - 1$.

Per la compatibilità di queste $n + m$ equazioni lineari deve essere zero il determinante dei coefficienti cioè

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots \\ 0 & 0 & b_0 & \ldots \end{vmatrix}.$$

Questo determinante è di grado n nei coefficienti di φ e di grado m in quelli di ψ.

È facile ora mostrare che l'annullarsi di questo determinante è anche condizione *sufficiente* perchè le due equazioni abbiano una radice comune.

In effetti consideriamo le $m + n$ equazioni già costruite

$$x^{n-1}\varphi(x) = 0,\ x^{n-2}\varphi(x) = 0,\ \ldots\ \varphi(x) = 0,$$
$$x^{m-1}\psi(x) = 0,\ x^{m-2}\psi(x) = 0,\ \ldots\ \psi(x) = 0.$$

Queste equazioni sono lineari *omogenee* in

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots,\ x^1,\ x^0.$$

Se il loro determinante è zero, quelle equazioni coesistono, e sopprimendone una, p. es. l'ultima, si ha dalla teoria delle equazioni lineari omogenee che le variabili che sono

$$x^{m+n-1}, \quad x^{m+n-2}, \; . \; . \; .$$

sono proporzionali ai minori contenuti nella matrice dei coefficienti; i quali minori saranno i complementi algebrici degli elementi dell' ultima linea nel determinante R. Supposto dunque che tali complementi algebrici non sono zero, possiamo intanto conchiudere:

Se $R = 0$ i complementi algebrici degli elementi di una linea qualunque nel determinante R, se non sono zero, formano una progressione geometrica, cioè il rapporto di due consecutivi è costante.

Ciò costituisce una notevole proprietà del determinante R.

Sieno allora

$$\gamma_{m+n-1}, \; \gamma_{m+n-2}, \; . \; . \; . \; \gamma_1, \; \gamma_0$$

i complementi algebrici degli elementi di una linea in R; supposto $R = 0$ e γ_0 diverso da zero si ha

$$\frac{x}{1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$

cioè questo valore di x è quello che fa coesistere tutte le equazioni, e quindi le due equazioni date hanno per radice comune $x = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$.

Supponiamo ora che sieno zero i complementi di tutti gli elementi in R cioè tutti i minori di ordine $m+n-1$, e che almeno un minore di ordine $m+n-2$ sia diverso da zero; sia questo p. es. quello ottenuto togliendo le due ultime colonne e le due ultime linee. Allora dalla teoria delle equazioni lineari, si sa che fra le $m+n$ equazioni precedenti, le ultime *due* sono conseguenza delle altre. Nelle prime $m+n-2$ equazioni raccogliamo i termini in x^1 e x^0, e allora ognuna di esse risulta con $m+n-1$ termini moltiplicati rispettivamente per

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots\ x^2,\ 1$$

gli ultimi termini essendo poi a loro volta funzioni lineari di x. Applicando lo stesso teorema di poc' anzi, che cioè le variabili sono proporzionali ai minori contenuti nella matrice dei coefficienti, si ha

$$\frac{x^2}{1}=\frac{\delta_2}{\delta_0}$$

dove δ_0 è il minore di ordine $m+n-2$ supposto diverso da zero, e δ_2 è quello che da esso si ricava sostituendo all' ultima colonna, la colonna dei termini in x^1 e x^0, raccolti in uno, nelle varie equazioni. Onde δ_2 sarà in generale una funzione lineare in x, e quindi la relazione precedente è soddisfatta da due valori di x che soddisfanno poi contemporaneamente le due equazioni date. Queste hanno dunque due radici comuni.

Così si può seguitare, e ricaviamo quindi infine:

Se $R=0$ certamente le due equazioni hanno almeno una radice comune; secondo poi il valore della caratteristica di R, varia il numero delle radici comuni alle due equazioni; propriamente se R ha per caratteristica $m+n-k$, cioè sono nulli tutti i minori di ordine superiore a $m+n-k$ senza essere nulli tutti quelli di ordine $m+n-k$, allora le due equazioni avranno k radici comuni.

(Per queste considerazioni si può vedere BALTZER, *Op. cit.*)

Siamo così condotti a proporci quall' altro problema più generale: *Quali sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè due equazioni ammettano k radici comuni?* Le condizioni trovate poco fa ci si presentano solo *sufficienti* non *necessarie.*

Tali condizioni ci si presenteranno sotto una forma assai facile e analoga a quella delle condizioni sufficienti ora trovate, se prendiamo in considerazione un' altra forma della risultante e propriamente quella cosiddetta di Bezout. Seguiremo in ciò le due già citate note di Darboux.

È importante notare che uno studio analogo ma prendendo in considerazione non il risultante sotto la forma di Bezout, ma sotto la forma di Eulero, si deve al GARBIERI, *Sulla teoria dell'eliminazione fra due equazioni.* (Acc. Gioenia di di Catania. Vol. IV, serie IV.) Le condizioni necessarie e sufficienti per l' esistenza di p radici comuni furono date da Kronecker mediante l' annullarsi dei determinanti di una certa successione a capo di cui c'è la risultante. (Vedi KRONECKER, *Acc. Berlino*, 1881; NETTO, *Crelle*, Vol. CXVI.)

Dal punto di vista della teoria degli invarianti si può vedere GORDAN, *Math. Ann.* III e i numerosi lavori che ne dipendono.

Indichiamo per sommi capi qual'è il metodo di Bezout.

Cominciamo col supporre le due equazioni di gradi eguali $m = n$.

Moltiplichiamo la prima per b_0 e la seconda per a_0 e sottragghiamo. Si ha un'equazione di grado $n-1$ del tipo

$$(a_1 b_0 - a_0 b_1) x^{n-1} + (a_2 b_0 - a_0 b_2) x^{n-2} + \dots + \\ + (a_n b_0 - a_0 b_n) = 0.$$

Moltiplicando ora la prima equazione per

$$b_0 x + b_1$$

e la seconda per $a_0 x + a_1$ e sottraendo si ha ancora un'equazione di grado $n-1$ e propriamente

$$(a_2 b_0 - a_0 b_2) x^{n-1} + [(a_3 b_0 - a_0 b_3) + \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1)] x^{n-2} + \dots = 0.$$

Così si può continuare moltiplicando la prima equazione per $b_0 x^2 + b_1 x + b_2$ e la seconda per $a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ e sottraendo; e così di seguito.

Si ottengono in tutto n equazioni di grado $n-1$, e per la loro coesistenza deve essere zero il determinante di tutti i coefficienti. Ponendo in generale

$$(a_i b_j - a_j b_i) = (i j)$$

si ha il determinante

$$\begin{vmatrix} (10) & (20) & \dots & (n\,0) \\ (20) & (30)+(12) & \dots & (n\,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n\,0) & (n\,1) & \dots & (n, n-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Si ha un determinante simmetrico di ordine n, e di grado n nei coefficienti di ciascuna delle due equazioni.

Se le due equazioni non sono del medesimo grado si possono ridurre al medesimo grado moltiplicando quella di grado minore per un' opportuna potenza di x; si potrebbero così ottenere tutte le n equazioni che si ottengono nell' altro caso; però con questo metodo si otterrebbe un determinante dello stesso grado nei coefficienti delle due equazioni; siccome sappiamo che la risultante deve essere di grado n nei coefficienti dell'equazione di grado m, e di grado m nei coefficienti dell' equazione di grado n, così è evidente che in questo caso dovrà staccarsi un fattore di grado $n-m$ $(n>m)$ nei coefficienti dell'equazione di grado minore.

Possiamo del resto giungere al risultato senza fattore estraneo, se in luogo di formare n equazioni col metodo indicato, se ne formano successivamente solo m, e per le altre $n-m$ equazioni si scelgono le seguenti

$$\begin{array}{ll} x^{n-m-1} & \varphi(x)=0 \\ x^{n-m-2} & \varphi(x)=0 \\ \dots & \dots \\ x^{0} & \varphi(x)=0. \end{array}$$

tutte di grado eguale o minore ad $n-1$.

Allora non si otterrà più un determinante simmetrico; ma le prime m linee sono formate come avanti, e le altre $n - m$ invece sono formate coi coefficienti della equazione di grado minore.

Per $n = 4$, $m = 2$ si ha p. es. il seguente determinante

$$\begin{vmatrix} (a_1 b_0 - a_0 b_1), & (a_2 b_0 - a_0 b_2) & , & - b_3 a_0 & , - b_4 a_0 \\ (a_2 b_0 - a_0 b_2), & (a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_0 b_3), & - a_1 b_3 - a_0 b_4, & - b_4 a_1 \\ a_0 & , \quad a_1 & , \quad a_2 & , \quad 0 \\ 0 & , \quad a_0 & , \quad a_1 & , \quad a_2 \end{vmatrix}$$

Col metodo di Bezout si hanno dunque in ogni caso sempre determinanti di ordine n, mentre con quello di Eulero si ottengono determinanti di ordine $n + m$. I due determinanti sono del medesimo grado nei coefficienti delle due equazioni e sono trasformabili l'uno nell'altro.

Noi non vogliamo entrare nei dettagli di questa trasformazione, per la quale si può vedere:

Trudi, *Determ.* p. 101; Baltzer, *Determ.* 5.ª edizione, p. 123.

Vogliamo invece passare a dimostrare questo teorema di Darboux (op. cit.):

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè le due equazioni di gradi m, n, $(m \leqq n)$ abbiano p radici comuni è che la matrice del determinante di Bezout abbia per caratteristica $n - p$.

Per dimostrare che la condizione è sufficiente si può seguire perfettamente lo stesso metodo seguito nel caso del determinante di Eulero, inquantochè anche qui il determinante di Bezout non è

altro che il determinante dei coefficienti di certe n equazioni lineari omogenee nelle n quantità

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots\ x^1,\ x^0.$$

Il ragionamento sarebbe lo stesso e quindi ci esoneriamo dal ripeterlo.

In quanto al dimostrare che le condizioni indicate sono necessarie, eccone la dimostrazione di Darboux.

Poniamo

$$b_0\,\varphi(x) - a_0\,\psi(x) = f_0(x)$$
$$(b_0 x + b_1)\,\varphi(x) - (a_0 x + a_1)\,\psi(x) = f_1(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(b_0 x^{m-1} + \ldots)\,\varphi(x) - (a_0 x^{m-1} + \ldots)\,\psi(x) = f_{m-1}(x).$$

Il determinante di Bezout è quello dei coefficienti delle seguenti equazioni di grado eguale o inferiore ad $n-1$;

$$\left.\begin{array}{r} f_0(x) = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_{m-1}(x) = 0 \\ x^{n-m-1}\,\varphi(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^0\,\varphi(x) = 0 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Supponiamo ora che φ e ψ abbiano un fattore comune di grado p, e sia $F(x)$; allora è evidente

che tutti i primi membri di queste equazioni avranno per fattore $F(x)$, e potremo scrivere

$$\left.\begin{array}{rl} f_0(x) = & F_0(x)\,F(x) \\ f_1(x) = & F_1(x)\,F(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{m-1}(x) = & F_{m-1}(x)\,F(x) \\ x^{n-m-1}\varphi(x) = & x^{n-m-1}\varphi_1(x)\,F(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x^0\varphi(x) = & x^0\varphi_1(x)\,F(x) \end{array}\right\} \quad (2)$$

e inoltre sia ancora

$$\psi(x) = \psi_1(x)\,F(x)$$

e φ_1 e ψ_1 non abbiano altro fattore comune.

Ponendo allora

$$\begin{array}{c} x^0 F(x) = z_0 \\ x^1 F(x) = z_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x^{n-p-1} F(x) = z_{n-p-1} \end{array}$$

è evidente che tutti gli n polinomi (1) possono esprimersi linearmente e omogeneamente mediante $z_0\, z_1 \ldots z_{n-p-1}$ che sono poi a loro volta espressioni lineari in

$$x^0 \; x^1 \; x^2 \ldots x^{n-1}.$$

Ora io dico che per la coesistenza delle (1) devono essere le z identicamente zero.

Poniamo

$$\varphi_1 = \alpha_0\, x^{m-p} + \alpha_1\, x^{m-p-1} + \ldots + \alpha_{m-p}$$
$$\psi_1 = \beta_0\, x^{n-p} + \beta_1\, x^{n-p-1} + \ldots + \beta_{n-p}$$
$$F = \gamma_0\, x^{p} \quad + \gamma_1\, x^{p-1} \quad + \ldots + \gamma_p\,;$$

si trova

$$= \gamma_0 [\beta_0\, \varphi_1(x) - \alpha_0\, \psi_1(x)]$$
$$= \gamma_0 [(\beta_0 x + \beta_1)\, \varphi_1(x) - (\alpha_0 x - \alpha_1)\psi_1(x)] + \gamma_1 [\beta_0 \varphi_1(x) - \alpha_0 \psi_1(x)]$$

. . . .

cioè il sistema delle equazioni

$$F_0 = 0,\ F_1 = 0,\ \ldots\ F_{m-p-1} = 0$$

è riducibile a quello delle equazioni

$$_0 \quad = \beta_0\, \varphi_1(x) - \alpha_0\, \psi_1(x) = 0$$
$$_1 \quad = (\beta_0\, x + \beta_1)\, \varphi_1(x) - (\alpha_0\, x + \alpha_1)\, \psi_1(x) = 0$$

. . . .

$$_{m-p-1} = (\beta_0\, x^{m-p-1} + \ldots)\, \varphi_1(x) - (\alpha_0\, x^{m-p-1} + \ldots)\, \psi_1(x) = 0.$$

Se col metodo di Bezout si vuol trovare la risultante di $\varphi_1 = 0$ e $\psi_1 = 0$ di gradi $m-p$, $n-p$ si deve appunto costruire il determinante dei coefficienti delle $n-p$ equazioni

$$F'_0 = 0 \qquad F'_1 = 0\ \ldots\ F'_{m-p-1} = 0$$
$$x^{n-m-1}\, \varphi_1(x) = 0\ \ldots\ \ x^0\, \varphi_1(x) = 0.$$

Tal determinante è dunque diverso da zero perchè φ_1 e ψ_1 non hanno fattori comuni per ipo-

tesi; intanto, per le osservazioni testè fatte, tal determinante è lo stesso di quello delle equazioni

$$F_0 = 0 \; . \; . \; . \; F_{m-p-1} = 0$$
$$x^{n-m-1} \varphi_1(x) = 0 \; . \; . \; . \; x^0 \varphi_1(x) = 0.$$

Se in queste equazioni ogni potenza di x la moltiplichiamo per $F(x)$, abbiamo tante equazioni lineari in $z_0 z_1 \ldots$ i cui coefficienti sono evidentemente gli stessi dei coefficienti di queste medesime equazioni considerate lineari nelle diverse potenze di x. Abbiamo dunque che $n-m$ equazioni lineari nelle $n-m$, z hanno il loro determinante diverso da zero, e quindi non esistono altri valori che i valori zero delle z, che possono soddisfare contemporaneamente quelle equazioni.

Le n equazioni (1) sono dunque tutte combinazioni lineari delle altre equazioni fra le medesime variabili

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \; . \; . \; . \; z_{n-p-1} = 0$$

in numero di $n-p$. Dunque di quelle n equazioni, almeno p sono conseguenza delle altre, e quindi per un teorema sulle equazioni lineari, si ha che la *caratteristica* del determinante dei coefficienti di quelle equazioni non può essere maggiore di $n-p$; non può poi essere neanche minore altrimenti ripetendo la prima parte della dimostrazione (quella riguardante la *sufficienza* delle condizioni) si ricaverebbe che le due equazioni avrebbero *più di p* radici comuni contro l'ipotesi.

Se, come abbiamo detto avanti, seguendo il Garbieri, si vuol fare la ricerca analoga ma pren-

dendo in considerazione il determinante di Eulero, si trovano condizioni analoghe a queste ma non riferentisi ad una matrice quadrata, sibbene ad una certa matrice rettangolare contenuta nel determinante di Eulero.

Tale matrice rettangolare è quella ricavata dal determinante di Eulero prendendo le $n-p+1$ prime linee delle a, e le $m-p+1$ prime linee delle b, e sopprimendo le ultime $p-1$ colonne che restano allora formate solo con elementi zero.

La condizione perchè vi sieno p radici comuni è che questa matrice sia *semplicemente* zero, cioè che abbia per caratteristica $m+n-2p+1$, cioè che sieno zero tutti i determinanti di ordine massimo in essa contenuti (che sono appunto di ordine $m+n-2p+2$) e non lo sieno tutti quelli di ordine inferiore.

Altri metodi per la ricerca della risultante sono quelli di Cayley. (*Crelle*. Vol. LIII, pag. 366.); Rosenhain. (*Crelle*. Vol. XXX, p. 157.) e Borchardt. (*Crelle*. Vol. LVII, p. 111.)

Dal punto di vista della *teoria delle forme* è fondamentale per lo studio della risultante la memoria di Gordan. (*Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen*. Math. Ann. Vol. III, p. 383.)

A questo lavoro si riattaccano tanti altri che ci dispensiamo dal citare perchè si entra in un campo che è quello della teoria degli invarianti e non è più quello dei determinanti.

Una ricerca che ha moltà affinità con quella della risultante è la ricerca del *discriminante* di un'equazione.

Si chiama discriminante di un' equazione quella funzione razionale intera dei coefficienti che eguagliata a zero rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè l' equazione abbia due radici eguali.

Si sa dall'algebra che quando un'equazione ha due radici eguali, allora tale radice è anche radice della prima derivata del primo membro dell'equazione, e viceversa se l'equazione ha una radice comune colla prima derivata essa avrà una radice doppia; onde ne viene che la ricerca del discriminante si riduce alla ricerca della risultante dell'equazione data e della sua prima derivata eguagliata a zero.

Il nome di *discriminante* viene da Sylvester (Phil. Magaz. 1851, II, p. 406).

Espresso mediante le radici sarebbe facile trovare il discriminante, perchè è chiaro che se si forma il prodotto di tutti i quadrati delle differenze delle radici a due a due, si ha un'espressione che, essendo simmetrica nelle radici, è esprimibile mediante i coefficienti dell'equazione, e che d'altra parte se è zero esprime che due radici sono eguali, e se due radici sono eguali essa è certamente zero.

Ora noi sappiamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

è eguale al prodotto delle differenze delle quantità

α prese a due a due, dunque possiamo conchiudere che il descriminante è il quadrato di questo determinante.

Eseguendo questo quadrato per linee e introducendo le somme delle potenze simili delle radici,

$$s_p = \alpha_1{}^p + \alpha_2{}^p + \ldots + \alpha_n{}^p$$

si ha che esso resta espresso dal determinante (del tipo di *Hankel*, v. § 19)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Il discriminante, calcolato come risultante di f e della sua prima derivata, risulta il determinante di ordine $2n-1$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n\,a_0 & (n-1)\,a_1 & (n-2)\,a_2 & \ldots \\ 0 & n\,a_0 & (n-1)\,a_1 & \ldots \\ 0 & 0 & n\,a_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

in cui le linee della prima specie sono in numero di $n-1$ e quelle della seconda specie in numero

di n. Si ha un' espressione evidentemente divisibile per a_0, e, soppresso questo fattore, ogni termine resta di $2n - 2^{mo}$ grado nei coefficienti dell' equazione.

§ 58. — Proprietà varie dei determinanti funzionali. Teoremi di Jacobi.

I determinanti funzionali furono cominciati a studiare da Jacobi (*Crelle,* Vol. XII, p. 38; *Crelle* Vol. XXII, p. 319; *Vorlesungen über Dynamik* p. 100.) e perciò furono anche chiamati *Jacobiani* da *Sylvester.*

Altri lavori sui determinanti funzionali sono quelli di

Sylvester (*Phil. Trans.*, 1853. T. CXLIII, pag. 476).
Cayley (*Crelle.* Vol. LII, pag. 276).
Donkin (*Phil. Trans.*, 1854, pag. 72).
Kronecker (*Crelle.* Vol. LXXII, pag. 155).
Clebsch (*Crelle.* Vol. LXIX, pag. 395).
Neumann (*Math. Ann.* Vol. I, p. 208, 1869).
Casorati (*Istituto Lombardo*, 1874).
Torelli (*Rend. Circ. mat. Palermo.* T. VII, pag. 75, 1893).

senza citare numerosi altri lavori che più o meno direttamente si riattaccano a questa teoria.

Si abbiano n funzioni $y_1 y_2 \ldots y_n$ di n varia-

bili $x_1 x_2 \dots x_n$. Si formi il determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Esso si chiama il *determinante funzionale o jacobiano* delle y. La maggior parte dei teoremi che troveremo su tali determinanti, pongono in vista una notevole analogia esistente fra essi e le derivate delle funzioni di una sola variabile; è perciò che si usa per tali determinanti il simbolo:

$$\frac{\partial (y_1, y_2 \dots y_n)}{\partial (x_1, x_2 \dots x_n)}.$$

È evidente dalla forma di J che i suoi minori sono anche determinanti funzionali; solo che alcune delle funzioni date non più vi compariscono e alcune delle variabili non sono più considerate come tali.

Una prima proprietà importante degli jacobiani è la seguente:

Si immaginino le $y_1 y_2 \dots y_n$ funzioni delle

$$z_1, \dots z_n;$$

e queste a loro volta funzioni delle $x_1 \dots x_n$; allora l'jacobiano delle y rispetto alle x è eguale al prodotto dei due jacobiani delle y rispetto alle z, e delle z rispetto alle x.

Questa proprietà è analoga a quella della derivata di *funzioni composte.*

Moltiplichiamo fra loro i due determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \dots \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \quad e \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

Eseguiamo questo prodotto combinando le linee del primo determinante colle colonne del secondo; e allora l' elemento $(i, j)^{mo}$ del prodotto verrà

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial x_j}$$

che è eguale a

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} .$$

Il teorema resta così dimostrato.

Sieno le $y_1 \dots y_n$ *definite come funzioni delle* $x_1 \dots x_n$, *e queste alla loro volta si possano considerare funzioni (inverse) delle y. Allora l'jacobiano delle y rispetto alle x è l' inverso dell' jacobiano delle x rispetto alle y.*

In effetti considerando le y funzioni delle x e le x funzioni delle y, e quindi osservando che il determinante delle y rispetto alle y è eguale ad 1 perchè

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_i} = 1 \quad \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = 0$$

e applicando il teorema precedente risulta

$$\frac{\partial (y_1 \ldots y_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)} \frac{\partial (x_1 \ldots x_n)}{\partial (y_1 \ldots y_n)} = 1$$

donde il teorema proposto.

Questo teorema evidentemente ha analogia con quello della derivata delle *funzioni inverse.*

Passiamo ora a un altro teorema che ha analogia con quello della derivata delle *funzioni implicite.*

Le funzioni y di x sieno date *implicitamente* mediante le n equazioni

$$F_1 = (y_1 \ldots y_n, x_1 \ldots x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n = (y_1 \ldots y_n, x_1 \ldots x_n) = 0.$$

L' Jacobiano delle y rispetto alle x è eguale in valore assoluto al quoziente degli Jacobiani delle F rispetto alle x e delle F rispetto alle y; propriamente

$$\frac{\partial (y_1 \ldots y_n)}{\partial (x_1 \ldots x \;)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_n)}{\partial \; y_1 \ldots y_n)}}.$$

In effetti se nelle F in luogo delle y supponiamo messe le loro espressioni nelle x, esse diventano identicamente zero.

Si hanno dunque le relazioni

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}.$$

Questa relazione mostra che il prodotto

$$\frac{\partial (y_1 \ldots y_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)} \frac{\partial (F_1 \ldots F_n)}{\partial (y_1 \ldots y_n)}$$

è esattamente

$$(-1)^n \frac{\partial (F_1 \ldots F_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)} .$$

Il teorema che dà maggior importanza ai determinanti funzionali è il seguente:

La condizione necessaria e sufficiente perchè fra n funzioni di n variabili esista una relazione, è che l'jacobiano di esse si annulli identicamente.

Date

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 (x_1 \ . \ . \ . \ x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n (x_1 \ . \ . \ . \ x_n) \end{aligned}$$

se eliminando $n-1$ delle variabili x, scompare anche l'ultima, allora si otterrà una relazione fra le y, $F(y_1 \ldots y_n) = 0$.

Da tale relazione si ricava

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ . \ . \ . \ + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0$$

per qualunque indice i, donde si vede che fra gli elementi di una stessa colonna nel determinante funzionale sussiste sempre la medesima relazione lineare omogenea, e quindi esso è identicamente zero.

Viceversa supponiamo che il determinante sia zero.

Eliminiamo fra le y le $n-1$ variabili $x_2 \dots x_n$; resta una relazione:

$$y_1 = \psi(x_1 y_2 \dots y_n)$$

nella quale noi potremo dimostrare che non compare la variabile x_1 cioè che è zero la derivata di ψ rispetto ad x_1, e quindi il teorema resta allora dimostrato.

Infatti consideriamo

$$y_1 \; y_2 \dots y_n$$

funzioni di $x_1 \; x_2 \dots x_n$ le quali poi a loro volta sieno funzioni di $x_1 \; y_2 \dots y_n$. In quanto alla x_1 è evidente che essa è funzione di sè stessa; in quanto alle $x_2 \; x_3 \dots x_n$ esse possono considerarsi funzioni di $x_1 \; y_2 \dots y_n$ risolvendo le ultime $n-1$ equazioni $y_2 = \varphi_2 \dots y_n = \varphi_n$ rispetto alle $x_2 \dots x_n$.

Applicando il primo dei teoremi sopra dimostrati si ha:

$$\frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 y_2 \dots y_n)} = \frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(x_1 y_2 \dots y_n)}.$$

Il primo fattore del secondo membro è per ipotesi zero, dunque lo sarà ancora il primo membro. Esso è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora nella formazione di questo determinante le $y_1\ y_2 \ldots y_n$ sono immaginate funzioni di

$$x_1\ y_2\ .\ .\ .\ y_n\,.$$

La y_1 funzione di tali variabili non è altro che la funzione ψ sopra trovata, e le altre sono date dalle relazioni identiche $y_2 = y_2 \ldots . y_n = y_n$.

Quindi tutti gli elementi al disotto della diagonale principale in questo determinante sono zero, e gli elementi della diagonale principale sono rispettivamente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1},\quad 1,\quad 1,\ .\ .\ .\ 1.$$

Lo sviluppo di questo determinante dà perciò semplicemente $\frac{d\ \psi}{d\ x_1}$.

Ciò mostra quanto abbiamo asserito.

Possiamo applicare questo teorema per ricercare quando una funzione di $x_1\ x_2$ contiene queste variabili sempre sotto la forma

$$\varphi = k_1\, x_1 + k_2\, x_2$$

in modo da potersi considerare addirittura funzione di tal binomio. Si sa che perchè la f sia funzione di φ, deve essere zero il determinante funzionale della funzione data e di φ. Si ha dunque

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = 0$$

cioè la funzione deve essere tale che sia

$$k_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Se $k_1 = 1$, $k_2 = i = \sqrt{-1}$, allora si ha la condizione

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = i \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Questa è la condizione perche la f sia funzione della variabile complessa $x_1 + i\, x_2$.

§ 59. — Teoremi riguardanti il caso in cui le funzioni si scindano in fattori.

Supponiamo che le funzioni date y_i sieno tutte riducibili alla forma

$$y_i = \frac{u_i}{u_0} \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Essendo allora

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{u_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_0}{\partial x_j}}{u_0^2}$$

il determinante funzionale delle y può scriversi

$$\frac{1}{{}_0^{2n+1}}\begin{vmatrix} u_0, u_0\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - u_0\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots & u_0\dfrac{\partial u}{\partial x_n} - u_0\dfrac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1, u_0\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - u_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots & u_0\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} - u_1\dfrac{\partial u}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n, u_0\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} - u_n\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots & u_0\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} - u_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

aggiungendo una prima linea cogli elementi

$$u_0 \quad 0 \quad 0 \ldots 0$$

e una prima colonna cogli elementi

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \ldots u_n$$

e dividendo per u_0.

Scomponendo questo determinante ad elementi binomii in altri ad elementi monomii, e osservando che in tal maniera tutti, meno uno, i determinanti che si ottengono risultano zero, e che l'unico determinante non zero ha per fattore u_0^n, si ha infine il determinante funzionale delle y sotto la forma

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{u_0^{n+1}} \begin{vmatrix} u_0, & \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n, & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Restano così introdotti questi nuovi determinanti formati in modo diverso che gli Jacobiani in quanto contengono una colonna i cui elementi sono $n+1$ funzioni date. Questa formola è di JACOBI (*Crelle*, Vol. XII, 1834).

A questo argomento si riattaccano alcune ricerche di Casorati (Istit. Lomb. 1874) e altre più recenti di TORELLI (Rend. Palermo 1893).

Si suole indicare con $K(u_0\ u_1 \dots u_n)$ il determinante contenuto nel secondo membro della formola superiore; esso è evidentemente una combinazione lineare di $n+1$ Jacobiani. Il CASORATI ha ricercato per il K la formola analoga alla (1) di Jacobi. Supponiamo che le $u_0\, u_1 \dots u_n$ sieno tutte della forma

$$u_i = \frac{v_i}{v} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n).$$

Allora

$$K(u_0 \dots u_n) = \begin{vmatrix} u_0 \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_n \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v^{2(n+1)}} \begin{vmatrix} v_0\, v,\ v\dfrac{\partial v_0}{\partial x_1} - v_0 \dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, v\dfrac{\partial v_n}{\partial x_n} - v_0 \dfrac{\partial v}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n\, v,\ v\dfrac{\partial v_n}{\partial x_1} - v_n \dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, v\dfrac{\partial v_n}{\partial x_n} - v_n \dfrac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

e scindendo al solito in determinanti ad elementi monomii, ovvero, più semplicemente, aggiungendo agli elementi di ciascuna colonna quelli della prima moltiplicati rispettivamente per

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x_n}$$

si ha infine

$$K(u_0\, u_1 \ldots u_n) = \frac{1}{v^{n+1}} K(v_0\, v_1 \ldots v_n) \qquad (2)$$

donde si vede che a differenza dell' Jacobiano, il determinante K soddisfa ad una relazione, da un certo punto di vista più semplice, inquantochè, a meno del fattore $\frac{1}{v^{n+1}}$ i due membri di questa relazione sono formati nella stessa maniera, l'uno colle u, l'altro colle v.

È naturale che da (1) (2) potrebbero ricavarsi formole riguardanti il caso in cui u_0 v non sieno divisori delle y, u, ma fattori. Basterebbe mutare u_0 in $\frac{1}{u_0}$, e v in $\frac{1}{v}$.

Il determinante K soddisfa a proprietà che hanno analogie con quelle dell' Jacobiano; così per es.:

Se K è identicamente nullo la relazione che lega fra loro le $n+1$ funzioni u_0 $u_1 \ldots u_n$ di n variabili x_1 $x_2 \ldots x_n$, è una relazione omogenea e reciprocamente (teor. di Casorati).

È interessante notare che questa proprietà del

K si trova già implicitamente adoperata in un lavoro di CLEBSCH (*Crelle* Vol. LXIX, p. 356 1868). Vedi perciò più avanti il § 61.

In effetti supponiamo prima che la relazione fra le u sia omogenea, e sia $\Phi\,(u_0\, u_1 \ldots u_n) = 0$ di grado ρ.

Allora avendosi

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_0}\dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_0}\dfrac{\partial u_0}{\partial x_n} + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

e per la relazione di Eulero avendosi poi ancora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_0} u_0 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} u_n = \rho\, \Phi = 0 \qquad (4)$$

il determinante di queste equazioni è zero, e tal determinante è proprio quello chiamato K.

Supponiamo reciprocamente che il determinante K sia zero. Allora si ricava, che se non sono zero tutti i minori di ordine n di K, deve essere il primo membro di (4) eguale a zero. Si ha dunque una relazione fra le u la quale non può che essere, a meno di un fattore, la supposta $\Phi = o$ che si è supposta la relazione irriducibile fra le a. Dunque il primo membro di (4) conterrà per fattore Φ, e dal computo dei gradi risulta poi che il rapporto non può che essere una costante. Di qui si vede che Φ soddisfa ad una relazione come nel teorema di Eulero e quindi è *omogenea*.

Non sarebbe difficile completare la dimostrazione in modo da comprendere anche il caso in cui tutti i minori di ordine n di K sieno zero, e così di seguito.

Queste considerazioni hanno avuto ultimamente una larga estensione in un lavoro di Torelli (cit.) Citeremo senz'altro alcuni dei più importanti teoremi trovati da quest'Autore.

Supponiamo che le funzioni $y_1 \ldots y_n$ date anzichè avere tutte il medesimo fattore comune (nel caso di Jacobi tal fattore era $\frac{1}{u_0}$) sieno ciascuna scomposte in due fattori:

$$\begin{aligned} y_1 &= \omega_1 u_1 \\ y_2 &= \omega_2 u_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \omega_n u_n : \end{aligned}$$

Allora si trova che l'jacobiano delle y si esprime col determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \ldots & 0 & -u_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \omega_n & 0 & \ldots & -u_n \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

dalla quale supponendo tutte le ω eguali fra loro si ricaverebbe la formola di Jacobi.

Similmente potrebbe trovarsi un'altra formola riguardante il caso in cui ciascuna delle y si scinda in tre fattori, etc.

Come caso particolare si può trovare la formola pel caso in cui

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha^{\varrho_1} u_1 \\ &\cdots\cdots \\ y_n &= \alpha^{\varrho_n} u_n . \end{aligned}$$

Basta fare $\omega_1 = \alpha^{\varrho_1} \ldots \omega_n = \alpha^{\varrho_n}$ ed eseguire opportunamente la trasformazione del determinante.

Si ha per risultato

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\rho_1 u_1 & \ldots & -\rho_n u_n \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \alpha^{\varrho_1 + \ldots + \varrho_n - 1}.$$

Analogamente possono trovarsi formole analoghe riguardanti il determinante K.

Poniamo

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha_0 v_0 \\ &\cdots\cdots \\ u_n &= \alpha_n v_n \end{aligned}$$

e il determinante K diventa

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \dots & 0 & -v_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_n & 0 & \dots & -v_n \\ 0 & \dots & 0 & v_0 & \dots & v_n \\ \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} & \frac{\partial v_0}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

il che costituisce una formola più generale di quella, sopra citata, di Casorati.

E così ponendo

$$\alpha_0 = \alpha^{\rho_0}, \quad \dots \quad \alpha_n = \alpha^{\rho_n}$$

e trasformando, si ha invece al secondo membro

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\rho_0 v_0 & \dots & -\rho_n v_n \\ 0 & v_0 & \dots & v_n \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \frac{\partial v_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} & \frac{\partial v}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \alpha^{\rho_0 + \dots + \rho_n - 1}.$$

§ 60. — Trasformazione di un integrale multiplo.

Un'altra analogia fra le derivate delle funzioni di una variabile, e i determinanti funzionali si appalesa nella trasformazione dell'integrale.

Per trasformare un integrale semplice in y in un altro in cui la variabile sia x, si sa che bisogna moltiplicare la funzione sotto il segno per la derivata dell'antica variabile rispetto alla nuova.

Una regola simile sussiste per gli integrali multipli; cioè *avendosi un integrale multiplo, nelle variabili $y_1\, y_2 \ldots y_n$, per trasformarlo in un altro nelle variabili $x_1\, x_2 \ldots x_n$ legate alle y da date relazioni, bisogna moltiplicare la funzione sotto il segno per l'Jacobiano delle antiche variabili rispetto alle nuove.*

Si abbia l'integrale multiplo

$$\int\int\int \ldots \int R\,(y_1 \;\ldots\; y_n)\; d\,y_1 \;\ldots\; d\,y_n\,.$$

Si ponga

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1\,(x_1 \;\ldots\; x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\,(x_1 \;\ldots\; x_n)\,. \end{gathered}$$

Nella seconda di queste relazioni sostituiamo in luogo di x_1 il valore ricavato dalla prima equa-

zione, e allora y_2 verrà espresso solo mediante y_1 $x_2 \dots x_n$; poi nella terza poniamo in luogo di x_1 x_2 i valori ricavati dalle prime due equazioni, e allora y_3 verrà espresso mediante y_1 y_2 $x_3 \dots x_n$. Così seguitando possiamo sempre immaginare le relazioni date messe sotto la seguente forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \\ y_2 &= f_2(y_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \\ y_3 &= f_3(y_1 y_2 x_3 \ldots\ldots x_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(y_1 y_2 \ldots y_{n-1} x_n) \end{aligned}$$

dove si può notare che f_1 è la stessa funzione φ_1.

Cominciamo ora, nell'integrale multiplo dato, ad eseguire l'integrazione rispetto ad y_n. Allora mediante l'ultima di queste relazioni possiamo introdurre la variabile x_n, e per trasformarlo in x_n basta moltiplicare la funzione sotto il segno per

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Possiamo ora analogamente, mediante la penultima delle formole precedenti, introdurre la variabile x_{n-1}, e bisognerà allora moltiplicare semplicemente per $\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$, e così di seguito.

L'integrale trasformato nelle x diventa infine

$$\int\int\int \ldots \int R \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

dove si intende che in R si facciano poi le sostituzioni in modo da renderlo funzione delle x.

La quantità per cui dunque bisogna moltiplicare la funzione sotto il segno è

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Le funzioni f non sono quelle date direttamente: noi cercheremo quindi di trasformare quest'ultima espressione in modo da farvi comparire le funzioni φ direttamente date. Mostreremo che quel prodotto è uguale all'Jacobiano delle y rispetto alle x, ricavate dalle funzioni φ date.

Moltiplichiamo infatti l'Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

per il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\partial f_2}{\partial y_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial y_1}, & -\frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

il cui valore è eguale ad 1.

Eseguendo il prodotto, combinando le colonne del primo determinante colle linee del secondo, si ha il determinante il cui termine generale $(i\,j)^{mo}$ è

$$(i\,j) =$$

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_j}{\partial y_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial f_j}{\partial y_2} - \ldots - \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x_i}\frac{\partial f_j}{\partial y_{j-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Ora se teniamo presente il modo di formazione delle equazioni f, e se vogliamo da esse ricavare la derivata di y_j rispetto ad x_i, cioè quella che si ricaverebbe dalle φ, cioè la

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$$

otteniamo, partendo da f_j,

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial y_{j-1}}\frac{\partial y_{j-1}}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial y_{j-1}}\frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x_i}$$

quindi si vede che

$$i\,j) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

dove nel secondo membro si intende fatta la derivata di f_j rispetto ad x_i solo in quanto x_i è contenuto esplicitamente in f_j; quindi se $i < j$ allora tale derivata è zero. Si ha perciò il determinante

prodotto sotto la forma

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} & \frac{\partial f_3}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

che è eguale a

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}.$$

E con ciò il teorema è dimostrato.

Ricerche speciali sull' annullarsi dei determinanti funzionali si trovano in

HAHN, *Math. Ann.* Vol. XV, pag. 111.

PASCH, *Notiz über ternäre Formen mit verschwindender Functionaldeterm.* (Math. Ann. Volume XVIII, pag. 93.)

PASCH, *Verschwind. Determ. 3. Grad. aus ternären linearen Formen.* (Math. Ann. Vol. XLIV, pag. 89.)

§ 61. — Sistemi di Jacobiani di $n+1$ funzioni di n variabili. Coordinate tangenziali. Jacobiani di Jacobiani. Teorema di Clebsch.

Supponiamo le coordinate omogenee $y_1\, y_2\, y_3$ di un punto di una curva piana proporzionali a tre funzioni *omogenee* intere di due parametri $x_1\, x_2$:

$$\rho\, y_1 = \varphi_1 (x_1\, x_2)$$
$$\rho\, y_2 = \varphi_2 (x_1\, x_2)$$
$$\rho\, y_3 = \varphi_3 (x_1\, x_2).$$

Supponiamo eliminate le due variabili omogenee $x_1\, x_2$, e si ha

$$F(y_1\, y_2\, y_3) = 0$$

che rappresenta l'equazione in coordinate omogenee della curva data. Se in questa poniamo in luogo delle y i loro valori φ, otteniamo una funzione di $x_1\, x_2$ identicamente zero.

Dunque possiamo porre eguali a zero le derivate di F rispetto ad x_1 ed x_2, cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = 0$$

dalle quali due relazioni ricaviamo che

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{\partial F}{\partial y_2}, \frac{\partial F}{\partial y_3}$$

sono proporzionali ai determinanti della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \end{matrix} \right\|$$

i quali sono jacobiani delle tre funzioni φ prese a due a due. Ora si sa dalla geometria analitica che le coordinate della tangente alla curva sono proporzionali appunto alle tre derivate di F, dunque possiamo conchiudere che le coordinate della tangente sono proporzionali ai tre Jacobiani formati con due delle tre funzioni $\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3$, cioè:

$$\sigma\, u_1 = J(\varphi_2\, \varphi_3) = \psi_1(x_1\, x_2)$$
$$\sigma\, u_2 = J(\varphi_3\, \varphi_1) = \psi_2(x_1\, x_2)$$
$$\sigma\, u_3 = J(\varphi_1\, \varphi_2) = \psi_3(x_1\, x_2)$$

indicando col simbolo J l'jacobiano.

Le u restano così espresse per $x_1\, x_2$.

Per la legge di dualità, per passare dalle u alle y, sulle u bisognerà effettuare le medesime operazioni, cioè le y restano a loro volta proporzionali agli jacobiani formati colle ψ.

È di qui che il Clebsch prese il punto di partenza per stabilire il seguente teorema più generale riguardante gli Jacobiani: (Clebsch, *Eine Ei-*

genschaft von Functionaldetermin., Crelle. Volume LXIX, pag. 355.)

Si abbiano $n+1$ funzioni omogenee di n variabili, e combinandole ad n ad n si formino gli $n+1$ Jacobiani; di questi si formino a loro volta gli $n+1$ Jacobiani combinandoli ad n ad n; a meno di un fattore comune, questi ultimi devono essere le stesse funzioni da cui siamo partiti.

La dimostrazione del teorema è la seguente:

Sieno $f_1 f_2 \dots f_{n+1}$ le $n+1$ funzioni omogenee date; $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n+1}$ i loro Jacobiani, e $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{n+1}$ gli jacobiani delle φ.

Formiamo il determinante

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & a_1 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_n} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & \Sigma a_i f_i & \Sigma b_i f_i \end{vmatrix}$$

che sviluppato secondo i prodotti dei minori contenuti nelle due ultime colonne per i loro complementi algebrici, dà

$$\sum_i b_i f_i \; \Sigma_k a_k \psi_k - \sum_i a_i f_i \; \sum_k b_k \psi_k =$$
$$= \sum_{ik} b_i a_k (f_i \psi_k - f_k \psi_i).$$

Intanto se dall'ultima linea sottragghiamo le precedenti moltiplicate rispettivamente per

$$f_1 f_2, \dots f_{n+1},$$

i due ultimi elementi dell'ultima linea diventano zero, e gli altri elementi diventano del tipo:

$$-\sum_i f_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \ldots n)$$

che è eguale a

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma f_i \varphi_i + \Sigma \varphi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Il secondo di questi sommatorii è zero perchè ricordando che ogni φ_i non è che un determinante funzionale di n fra le f, esso non è altro che lo sviluppo del determinante ottenuto dalla matrice delle $n(n+1)$ derivate delle f, quando si completi con una linea i cui elementi sono le derivate delle f rispetto a x_j; quindi non è altro che lo sviluppo di un determinante con due linee identiche.

Anche il primo sommatorio è zero, perchè

$$\Sigma f_i \varphi_i$$

non è altro che lo sviluppo del determinante K (v. § 59) relativo alle f, il quale, sappiamo, che è zero quando le f sono omogenee, come qui appunto si suppongono; quindi anche la derivata rispetto ad x_j sarà zero. Abbiamo perciò che R, con questa trasformazione, verrà a contenere tutti gli elementi dell'ultima linea eguali a zero, e quindi possiamo conchiudere che $R = 0$ indipendentemente dalle a e b.

Nello sviluppo di R devono dunque essere zero

tutti i coefficienti delle diverse combinazioni di a e b, cioè possiamo dire che per qualunque combinazione i, k, deve aversi

$$f_i \psi_k - f_k \psi_i = 0$$

donde

$$\frac{f_i}{f_k} = \frac{\psi_i}{\psi_k}$$

cioè, a meno di un fattore comune, le f coincidono colle ψ.

Il Clebsch, nel lavoro citato, osserva che è di grande interesse la ricerca del fattore per il quale le f differiscono dalle ψ, e ne fa la ricerca nei casi $n + 1 = 3$, e $n + 1 = 4$.

Di una ricerca simile a questa si occupa Rosanes, *Ueber Funct. welche ein den Funct. determ. analoges Verhalten zeigen*. Crelle. Vol. LXXV, p. 166. Qui si tratta dei determinanti formati colle derivate seconde di tre funzioni date di due variabili.

§ 62. — Sistemi di Jacobiani di n funzioni di $n + 1$ variabili.

Mentre nel § precedente abbiamo riferito un teorema rimarchevole sui sistemi di Jacobiani di $n + 1$ funzioni di n variabili, qui invece vogliamo considerare certi sistemi di n funzioni di $n + 1$ variabili.

Si abbiano n funzioni

$$y_1 \; y_2 \; . \; . \; . \; y_n$$

delle $n+1$ variabili

$$x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_{n+1}.$$

Lasciando da parte ogni volta una variabile si possono formare $n+1$ Jacobiani, che sono quelli contenuti nella matrice rettangolare

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \end{matrix} \right\| .$$

Ora chiamiamo rispettivamente

$$\psi_1 \; \psi_2 \; . \; . \; . \; \psi_{n+1}$$

gli $n+1$ determinanti ottenuti da questa matrice sopprimendo semplicemente le colonne 1.ª, 2.ª . . . $(n+1)^{ma}$. Allora sussiste la formola

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}\psi_2 + \; . \; . \; . \; + (-1)^n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\psi_{n+1} = 0.$$

Questa formola si trova in Jacobi, Crelle, Vol. XXVII; per essa si può anche vedere Neumann, *Zur Theorie der Functionaldeterminanten*, Math. Ann. Vol. I, p. 208.

Ecco la dimostrazione che noi daremo di questa formola.

È facile far vedere che eseguendo le derivazioni indicate e poi la somma coi segni alternati, i termini spariscono a due a due.

In effetti il termine contenente p. es.:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}$$

verrà due volte; una volta quando si deriva ψ_2 rispetto ad x_2, e una volta quando si deriva ψ_1 rispetto ad x_1.

I coefficienti di tali due termini sono rispettivamente

$$-\begin{vmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_3}{\partial x_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

e

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_3}{\partial x_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

la cui somma è zero. Similmente si può riconoscere che tutti i coefficienti delle diverse derivate seconde sono tutti zero; è quindi dimostrata la formola suindicata.

§ 63. — Jacobiana di tre curve.

Lo studio del determinante funzionale acquista una speciale importanza nella teoria delle curve algebriche. Noi non possiamo naturalmente dilungarci su questo argomento, ma ci limiteremo solo ad accennare le principali proprietà.

Sieno date tre curve algebriche di equazioni, in coordinate omogenee $x_1\, x_2\, x_3$:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \chi = 0.$$

Formiamo l'jacobiano di queste tre funzioni e eguagliamolo a zero; otterremo l'equazione di una curva che si chiama la *Jacobiana del sistema delle tre curve.*

Questa curva possiede rispetto alle tre curve molte proprietà singolari; in primo luogo se m m' m'' sono gli ordini delle tre curve date, è evidente che *essa è una curva di ordine*

$$m + m' + m'' - 3.$$

Inoltre essa passa per tutti i punti comuni alle tre curve. Giacchè moltiplicando le due prime colonne del determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

per x_1 e x_2 e aggiungendole alla terza moltiplicata per x_3 si ha, per effetto dell'omogeneità delle funzioni φ, ψ, χ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & m \varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & m' \psi \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, & m'' \chi \end{vmatrix}.$$

Ora se si considera un punto comune alle tre curve, per esse diventano zero gli elementi dell'ultima colonna, e quindi è zero anche il determinante.

È facile definire la curva Jacobiana come un luogo di punti.

Facciamo le polari di un punto $(y_1\, y_2\, y_3)$ rispetto alle tre curve. Si ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} X_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} X_3 = 0$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} X_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} X_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y_3} X_3 = 0$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial y_1} X_1 + \frac{\partial \chi}{\partial y_2} X_2 + \frac{\partial \chi}{\partial y_3} X_3 = 0.$$

Supponiamo che queste tre rette passino per un medesimo punto, cioè che queste tre equazioni sieno soddisfatte dal medesimo sistema di valori per le X. Allora deve essere zero il determinante del

sistema, e si ha quindi che il punto (y) deve soddisfare l'equazione della Jacobiana; dunque possiamo conchiudere: *la Jacobiana del sistema di tre curve è il luogo dei punti tali che le loro rette polari rispetto alle tre curve si incontrano in un medesimo punto.*

Immaginiamo che le tre curve sieno degli stessi ordini; allora con esse si può formare una cosidetta *rete*

$$\lambda\varphi + \mu\psi + \nu\chi = 0$$

in cui variando λ, μ, ν, si ha una doppia infinità di curve.

La Jacobiana del sistema delle tre curve si potrà allora chiamare la *Jacobiana della rete.* Considerandola da questo punto di vista si possono per essa dare due definizioni geometriche assai rimarchevoli.

Perchè una curva qualunque della rete abbia un punto doppio bisogna che sieno soddisfatte le tre condizioni:

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \chi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Se le coordinate di un punto (x) soddisfano a queste tre condizioni, esse soddisfano ancora all'altra condizione rappresentata dal determinante dei coefficienti di λ, μ, ν eguagliato a zero. Ora tal determinante non è che il primo membro della equazione della Jacobiana.

Dunque: *la Jacobiana di una rete è il luogo dei punti doppii delle curve della rete.*

La tangente ad una curva φ_1 è

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} X_3 = 0$$

e quella alla curva ψ_1 è

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} X_3 = 0$$

dove le X si suppongono le coordinate correnti, e x il punto di contatto. Se le due curve devono avere le tangenti comuni, a meno di un fattore, il primo membro della seconda equazione deve essere lo stesso della prima, cioè le derivate di ψ_1 devono essere proporzionali a quelle di φ_1, *e ciò per il punto di contatto* (x); in altri termini devono essere zero tutti i determinanti della matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\psi \varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \end{array} \right\| .$$

Se $\varphi_1 = 0$ $\psi_1 = 0$ sono le equazioni di due curve della rete, cioè sono della forma

$$\varphi_1 = \lambda_1 \varphi + \mu_1 \psi + \nu_1 \chi$$
$$\psi_1 = \lambda_2 \varphi + \mu_2 \psi + \nu_2 \chi$$

allora l'annullarsi di tutti i determinanti della matrice indicata, porta all'annullarsi del determinante che rappresenta l'Jacobiana.

Giacchè se in

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

aggiungiamo alla terza linea moltiplicata per ν_2, la seconda e la prima moltiplicate rispettivamente per μ_2 e λ_2, abbiamo nella terza linea esattamente le derivate di ψ_1. Inoltre alla seconda linea moltiplicata per

$$\mu_1 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \mu_2$$

aggiungiamo la prima moltiplicata per

$$\lambda_1 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \lambda_2$$

e la terza, modificata come avanti si è detto, moltiplicata per

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

e allora alla seconda linea compariscono esattamente le derivate di φ_1. Dunque J viene a trasformarsi in un altro determinante di cui due linee formano la precedente matrice. Essendo zero que-

sta matrice sarà zero il determinante. Dunque possiamo dire:

La Jacobiana della rete si può considerare come il luogo dei punti in cui due curve della rete si toccano.

§ 64. — Hessiani. Punti di flesso delle curve. Curvatura delle superficie.

Data una funzione di n variabili, formiamo le n derivate prime della funzione; di queste n derivate formiamo il determinante funzionale; si ha un determinante simmetrico formato colle derivate seconde della funzione data, e che si chiama *Hessiano della funzione data* dal nome di Hesse che per il primo ne studiò la proprietà. (Hesse, *Crelle.* Vol. XXVIII, p. 83, 1844; Sylvester, *Camb. and Dubl. math. Journ.* Vol. VI, p. 186; Hesse, *Crelle.* Vol. XLII, p. 122, Vol. LVI, p. 263.)

È particolarmente interessante lo studio dell'Hessiano nella teoria delle curve e delle superficie.

Si abbia una curva piana di ordine m data dall'equazione in coordinate omogenee

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = 0.$$

L'Hessiano sarà evidentemente di grado

$$3\,(m - 2);$$

se lo eguagliamo a zero abbiamo l'equazione di una curva di ordine $3(m-2)$. In quali punti questa curva incontra la curva data?

Supponiamo prima l'equazione della curva in coordinate non omogenee, ma rettangolari

$$f(xy) = 0.$$

Sappiamo che il raggio di curvatura in un punto della curva è dato da (V. *Calcolo diff.*, pag. 252.)

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

dove con $y'\, y''$ si intendono le derivate prime e seconde di y rispetto ad x. Se si vuole esprimere questo raggio R mediante le derivate di f rispetto ad x ed y, dobbiamo servirci delle relazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

donde

$$(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

$$' = -\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right.$$

e quindi

$$R = -\frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}.$$

Facciamo ora la trasformazione di questa formola introducendo le coordinate omogenee.

Osserviamo che il denominatore dell'espressione di R può scriversi sotto forma di determinante nella seguente maniera:

$$-\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Intanto ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

si ha

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = x_3{}^m\, f(x\, y).$$

Per $x_3 = 1$, x, y diventano x_1, x_2, e le derivate di F rispetto ad x_1, x_2 diventano esattamente le analoghe di f rispetto ad x, y.

Possiamo facilmente mostrare che l'Hessiano

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

a meno di un fattore, diventa esattamente il determinante soprascritto quando si passa da coordinate omogenee a coordinate cartesiane, cioè quando si pone $x_3 = 1$. Giacchè per la formola di Eulero si ha

$$m\,F = 0 = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

$$(m-1) \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3}$$

ecc. ecc. ecc.

e quindi moltiplicando la prima colonna per x_1 e la seconda per x_2 e sommandole colla terza moltiplicata per x_3 si ha che il determinante precedente si trasforma in

$$H = \frac{m-1}{x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

e se ora applichiamo le stesse formole e sommiamo alla terza linea moltiplicata per x_3 la prima e la seconda moltiplicate rispettivamente per x_1 x_2, si ha

$$H = \frac{(m-1)^2}{x_3^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

e si vede che, ponendo $x_3 = 1$, poichè la F diventa f e le derivate rispetto ad x_1 x_2 diventano quelle rispetto ad x, y, così H diventa esattamente

$$\left(\text{a meno del fattore } -\frac{1}{(m-1)^2}\right)$$

il determinante soprascritto.

Possiamo allora scrivere in coordinate omogenee

$$R = (m-1)^2 \frac{1}{x_3^3} \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{H}.$$

Di qui si vede che nei punti della curva in cui $H = 0$ cioè nei punti nei quali la curva $H = 0$ taglia la curva fondamentale $F = 0$, il raggio di curvatura è infinito, cioè quei punti sono *punti di flesso* per la curva data.

Abbiamo dunque:

La curva Hessiana taglia la curva fondamentale nei punti di flesso di questa, e quindi esistono

in generale $3(m-2)m$ *punti di flesso* osservando che le due curve $F=0$ $H=0$ sono degli ordini rispettivamente m, $3(m-2)$ e quindi si tagliano in

$$3m(m-2)$$

punti.

Passiamo ora alle superficie.

Sia data la superficie di equazione $f(xyz)=0$.

In questo caso la curvatura è data dalla formola

$$C=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

dove p q sono le derivate prime di z rispetto ad x e y, e r, s, t sono rispettivamente le derivate seconde, cioè

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$=\frac{\partial p}{\partial x} \qquad =\frac{\partial q}{\partial y} \qquad =\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}\,.$$

Volendo introdurre le derivate di f (indicandole con f_1 f_2 f_3 f_{11} f_{22} f_{12} ecc.) essendo

$$p=-\frac{f_1}{f_3} \qquad q=-\frac{f_2}{f_3}$$

si trova

$$r\,t - s^2 = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} & \dfrac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{f_3{}^2} \begin{vmatrix} f_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ f_2 & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ f_3 & \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ora

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = f_{11} + f_{13}\,p$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = f_{12} + f_{13}\,q$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_{21} + f_{23}\,p$$

ecc. ecc.

onde il determinante di sopra può scriversi:

$$- \frac{1}{f_3{}^4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ f_1 & f_{11} + f_{13}\,p & f_{12} + f_{13}\,q & f_{13} \\ f_2 & f_{12} + f_{23}\,p & f_{22} + f_{23}\,q & f_{23} \\ f_3 & f_{13} + f_{33}\,p & f_{23} + f_{33}\,q & f_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{f_3^4}\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Con un ragionamento perfettamente simile a quello fatto sopra, si fa vedere che questo determinante, a meno di un fattore, è l'Hessiano di f quando vi si introducono le variabili omogenee.

Poniamo cioè

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

e

$$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = x_4^m f(x\, y\, z)$$

e allora si ha

$$C = -\frac{x_4^4}{(m-1)^2 (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2} H$$

indicando con H l'Hessiano di F.

Questa formola è perfettamente analoga a quella che si ottiene per le curve. La superficie $H = 0$ si chiama superficie Hessiana, ed è di ordine

$$4(m-2).$$

I punti di curvatura-zero di F stanno sulla Hessiana e si chiamano i *punti parabolici della superficie.*

§ 65. — Altre ricerche sugli Hessiani.

Passiamo a calcolare in generale l'Hessiano quando dalle variabili *omogenee* si passa alle *non omogenee*.

Sia $F(x_1 \dots x_n)$ una funzione omogenea di grado m nelle n variabili $x_1 \dots x_n$, e ponendo

$$\frac{x_1}{x_n} = X_1, \ \dots \ \frac{x_{n-1}}{x_n} = X_{n-1}$$

sia

$$F(x_1 \ \dots \ x_n) = x_n{}^m f(X_1 \ \dots \ X_{n-1})$$

cioè f sia in fondo la stessa funzione data, ma scritta colle variabili non omogenee.

Formiamo l'Hessiano di F rispetto alle n variabili

$$\begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aggiungiamo all'ultima colonna moltiplicata per x_n, le precedenti rispettivamente moltiplicate per $x_1 \dots x_{n-1}$; tenendo conto delle relazioni di Eulero, si ha allora, a meno di un fattore,

$$\begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n-1} & F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n-1,1} & \dots & F_{n-1,n-1} & F_{n-1} \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n-1} & F_n \end{vmatrix}.$$

Se ora operiamo in modo simile per le linee cioè moltiplichiamo la prima linea, la seconda, ecc., rispettivamente per $x_1\, x_2 \ldots$, e poi sommiamo colla n^{ma} moltiplicata per x_n, e teniamo conto ancora delle relazioni di Eulero, otteniamo a meno di un fattore,

$$\begin{vmatrix} F_{11} & \ldots & F_{1n-1} & F_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n-1,1} & \ldots & F_{n-1,n-1} & F_{n-1} \\ F_1 & \ldots & F_{n-1} & \frac{m}{m-1} F \end{vmatrix}.$$

Come si vede, è scomparsa ogni traccia di derivazione rispetto ad x_n. Se poniamo $x_n = 1$ le derivate di F si mutano nelle derivate corrispondenti di f rispetto alle variabili non omogenee, e si ha il determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1n-1} & f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-1,1} & \ldots & f_{n-1,n-1} & f_{n-1} \\ f_1 & \ldots & f_{n-1} & \frac{m}{m-1} f \end{vmatrix}$$

il quale perciò, a meno di un fattore numerico, sarà eguale all' Hessiano della funzione data.

Esaminiamo ora in secondo luogo la forma che acquista l'Hessiano di una funzione omogenea in n variabili, quando queste variabili si sottopongono ad una trasformazione lineare.

Troveremo che, a meno di un fattore dipendente dai coefficienti della trasformazione, l'Hessiano resta inalterato; ciò corrisponde a dire che l'Hessiano è una formazione *covariante* della funzione data.

Le x_i si trasformino colle sostituzioni

$$x_i = \sum_j a_{ij} y_j; \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n).$$

Poniamo il determinante

$$| a_{ij} | = \Delta.$$

Io dico che chiamando

$$H(x), \qquad H(y)$$

rispettivamente gli Hessiani della funzione in x $F(x)$ e della sua trasformata in y si ha semplicemente:

$$H(y) = H(x) \Delta^2.$$

Poniamo che la $F(x)$, espressa nelle y, diventi $\Phi(y)$.

Si ha

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} =$$
$$= \sum_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial x_k} a_{kj}$$

onde, per la regola di moltiplicazione dei determinanti, si vede che l'Hessiano di Φ è eguale al prodotto del determinante formato cogli elementi a_{jk}

e del determinante formato cogli elementi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial x_k}.$$

Chiamando Ω tale determinante si ha cioè

$$H(y) = \Omega . \Delta.$$

Ora di nuovo si ha la formola

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial x_k} = \sum_h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_i} =$$

$$= \sum_h \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_h} a_{hi}$$

e quindi il determinante Ω è eguale all'Hessiano di F moltiplicato per Δ; onde infine

$$H(y) = H(x) \Delta^2$$

come si volea dimostrare.

Se colla trasformazione delle x nelle y la Φ non deve contenere una delle y, p. es. y_r, allora la sua derivata rispetto ad y_r è zero, e quindi tutti gli elementi di una linea di $H(y)$ risultano zero, e quindi $H(y)$, e perciò anche $H(x)$, sarà zero.

Si vede di quì che se la funzione data è tale che colla trasformazione lineare può ridursi ad una avente una variabile di meno, allora l'Hessiano è zero.

Si era creduto per un tempo che fosse anche vero in generale il teorema reciproco, cioè che l'annullarsi dell'Hessiano fosse condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione omogenea

data di n variabili, si possa trasformare in un'altra di $n-1$ variabili.

In due lavori Hesse aveva creduto di dimostrare questo teorema. (*Crelle.* Vol. XLII, p. 119 e volume LVI, pag. 263.)

È stato poi invece riconosciuto che *il teorema è insussistente per funzioni omogenee di più di 4 variabili.* Su questo si può vedere un lavoro di Gordan-Noether (*Math. Ann.* Vol. X, p. 547).

Altri lavori sullo stesso argomento sono quelli di: Pasch, *Crelle.* Vol. LXXX, p. 169; Gordan-Noether (*Bericht. Erlang. Soc.*, Dic. 1875).

La possibilità della trasformazione in una funzione omogenea di un numero minore di variabili ha relazione colla esistenza di una relazione *lineare* a coefficienti costanti fra le n derivate prime della funzione.

In effetti, se esiste la relazione identica

$$c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ . \ . \ . + c_n F_n = 0$$

dove le c sono costanti e le F_i sono le derivate prime della funzione F, allora eseguendo la seguente trasformazione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + c_1 \ y_n \\ x_2 &= y_2 + c_2 \ y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= y_{n-1} + c_{n-1} y_n \\ x_n &= c_n y_n , \end{aligned}$$

la derivata di Φ (funzione trasformata) rispetto ad

y_n sarà

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_n} =$$
$$= c_1 F_1 + \ldots + c_n F_n = 0$$

dunque Φ non verrà a contenere la variabile y_n. Viceversa se colla trasformazione

$$x_1 = \Sigma\, a_{1i}\, y_i$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \Sigma_i\, a_{ni}\, y_i$$

la Φ non viene a contenere la y_n allora sarà zero la sua derivata rispetto ad y_n cioè sarà

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial F}{\partial x_1} a_{1n} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} a_{nn} = 0$$

cioè

$$a_{1n} F_1 + \ldots + a_{nn} F_n = 0.$$

Se quindi fosse vero il teorema di Hesse, sarebbe anche vero che la relazione, che certamente deve esistere fra le prime derivate quando l'Hessiano è zero (perchè l'Hessiano non è che l'Jacobiano delle n funzioni derivate) deve sempre essere una relazione *lineare* omogenea. Ora ciò si dimostra falso per $n > 4$. Il teorema di Hesse è vero invece per $n \leqq 4$ (v. Op. cit.).

Applicando questo risultato alla geometria, possiamo dire:

Una curva di cui la Hessiana è identicamente zero si scinde in rette partenti da un punto. Una

superficie di cui la Hessiana è identicamente zero è un cono.

Sono numerose le ricerche fatte sull'Hessiano dal punto di vista della geometria e della teoria delle forme.

Nel caso delle forme binarie (funzioni omogenee di due variabili) studiando le radici dell'Hessiano rispetto a quelle della forma data, si ottengono dei notevoli risultati. A questo proposito si possono vedere i lavori di GERBALDI, *Rend. Palermo.* Vol. III, 1889, p. 22 e p. 60 e di SCHOUTE, *Idem* pag. 160.

FINE.

AVVERTENZA

Tutti i MANUALI HOEPLI si spediscono **franco di porto** nel Regno. — Chi desidera ricevere i volumi raccomandati, onde evitare lo smarrimento, è pregato di aggiungere la sopratassa di raccomandazione.

PROSPETTO ALFABETICO

DELLE MATERIE TRATTATE NEI 500 MANUALI HOEPLI

Si cerchi nel Catalogo
sotto ciascuna delle voci indicate in questo prospetto.

AGRARIA

Abitazioni degli animali domestici — Agronomia — Alcool — Alimentazione del bestiame — Analisi del vino — Anatomia vegetale — Animali da cortile — Apicoltura — Bachi da seta — Cane — Cantiniere — Caseificio — Catasto — Cavallo — Chimica agraria — Cognac — Colombi domestici — Coltivazione piante tessili — Computisteria agraria — Concimi — Coniglicoltura — Contabilità agraria — Economia dei fabbricati rurali — Enologia e misurazione delle botti — Enologia domestica — Estimo rurale — Estimo dei terreni — Fisiologia vegetale — Floricoltura — Frumento e mais — Frutta minori — Frutticoltura — Funghi e tartufi — Gelsicoltura — Humus — Igiene rurale — Igiene veterinaria — Immunità e resistenza alle malattie — Insetti nocivi — Insetti utili — Latte, burro e cacio — Legislazione rurale — Macchine agricole — Maiale — Malattie crittogamiche delle piante erbacee — Malattie ed alterazioni dei vini — Mezzeria — Molini — Olivo ed olio — Olii vegetali, animali e minerali — Orticoltura — Panificazione — Piante e fiori — Piante industriali — Pollicoltura — Prato — Prodotti agricoli del Tropico — Prontuario dell'agricoltore — Selvicoltura — Tabacco — Triangolazioni topografiche e catastali — Uve da tavola — Vino — Viticoltura — Zootecnia.

AMMINISTRAZIONE PUBBLICA.

Catasto italiano — Codice doganale — Contabilità dello Stato — Contabilità comunale — Debito pubblico — Diritto amministrativo — Imposte dirette — Legge comunale e provinciale — Proprietario di case — Ricchezza mobile — Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali.

ARCHEOLOGIA.

Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Antichità private dei romani — Araldica — Archeologia dell'arte — Architettura — Mitologia comparata, greca e romana — Monete greche — Monete romane — Numismatica — Paleografia — Paleoetnologia — Pittura — Scoltura — Topografia di Roma antica — Vocabolarietto pei numismatici — Vocabolario araldico.

ARTE MILITARE.

Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità — Duellante — Esplodenti — Marine da guerra — Pirotecnia — Scherma — Storia dell'arte militare — Telemetria — Ufficiale.

BELLE ARTI.

Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Anatomia pittorica — Architettura italiana — Arti grafiche fotomeccaniche — Calligrafia — Colori e pitture — Colori e vernici — Decorazione e industrie artistiche — Disegno — Disegno geometrico — Fabbricati civili di abitazioni — Fiori artificiali — Gioielleria, oreficeria — Litografia — Luce e colori — Majoliche e porcellana — Marmista — Monogrammi — Ornatista — Pittura — Pomologia artificiale — Prospettiva — Ristauratore dei dipinti — Scoltura — Teoria delle ombre.

BESTIAME.

Abitazioni degli animali domestici — Alimentazione del bestiame — Animali da cortile — Cane — Cavallo — Colombi domestici — Coniglicoltura — Igiene veterinaria — Maiale — Orticoltura e mitilicoltura — Piscicoltura d'acqua dolce — Pollicoltura — Zoonosi — Zootecnia.

DIRITTO e LEGISLAZIONE.

Catasto italiano — Codici diversi — Codice doganale — Conciliatore — Digesto — Diritti e doveri dei cittadini — Diritto amministrativo — Diritto civile — Diritto commerciale — Diritto costituzionale — Diritto ecclesiastico — Diritto internazionale privato — Diritto internazionale pubblico — Diritto penale — Diritto romano — Imposte dirette — Ipoteche — Legge comunale e provinciale — Leggi usuali — Legislazione rurale — Mandato commerciale — Notaro — Ordinamento degli stati liberi d'Europa e fuori d'Europa — Proprietario di case — Ricchezza mobile — Testamenti.

ECONOMIA e COMMERCIO.

Assicurazione sulla vita — Computisteria — Computisteria agraria — Contabilità comunale — Contabilità dello Stato — Debito pubblico — Economia politica — Interesse e sconto — Logismografia — Mandato commerciale — Metrologia universale — Paga giornaliera (Prontuario della) — Ragioneria — Ragioneria delle Cooperative di Consumo — Ragioneria industriale — Scienza delle finanze — Scritture d'affari — Socialismo — Società di mutuo soccorso — Statistica — Tecnologia e terminologia monetaria — Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali — Valori pubblici.

ELETTRICITÀ.

Cavi telegrafici sottomarini — Elettricista — Elettricità — Galvanoplastica — Illuminazione elettrica — Magnetismo ed elettricità — Telefono — Telegrafia — Unità assolute.

ERUDIZIONE, BIBLIOGRAFIA, ecc.

Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Bibliografia — Bibliotecario — Crittografia — Dizionario bibliografico — Enciclopedia — Errori e pregiudizi volgari — Grafologia — Paleografia — Stenografia — Tipografia.

FILOSOFIA e PEDAGOGIA.

Didattica — Estetica — Etica — Filosofia morale — Giardino infantile — Ginnastica femminile e maschile — Giuochi infantili — Grafologia — Igiene scolastica — Logica — Logica matematica — Psicologia — Psicologia fisiologica — Sordomuto.

FISICA e CHIMICA.

Acetilene — Acido solforico, nitrico, cloridrico — Adulterazione e fabbricazione degli alimenti — Alcool — Analisi del vino — Analisi volumetrica — Arti grafiche fotomeccaniche — Calore — Chimica — Chimica agraria — Chimico industriale — Cognac — Colori e vernici — Concimi — Conserve alimentari — Dinamica — Dizionario fotografico — Energia fisica — Esplodenti — Farmacista — Fisica — Fotocromatografia — Fotografia ortocromatica — Fotografia pei dilettanti — Fulmini e parafulmini — Gravitazione — Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica — Infezione, disinfezione — Latte, burro — Luce e colori — Luce e suono — Meteorologia — Microscopio — Olii vegetali, animali e minerali — Ottica — Proiezioni fotografiche — Ricettario fotografico — Spettroscopio — Termodinamica — Tintore — Tintura della seta.

GEOGRAFIA.

Alpi — Atlanti — Cartografia — Climatologia — Cosmografia — Cristoforo Colombo — Dizionario alpino — Dizionario geografico — Esercizi geografici — Geografia — Geografia classica — Geografia fisica — Mare — Naturalista viaggiatore — Prealpi bergamasche — Prontuario di geografia e statistica — Topografia di Roma antica — Vulcanismo.

INDUSTRIE TESSILI, LAVORI FEMMINILI, ecc.

Bachi da seta — Coltivazione e industria delle piante tessili — Confezione d'abiti per signora — Disegno, taglio e confezione di biancheria — Filatura — Filatura della seta — Fiori artificiali — Gelsicoltura — Industria della seta — Macchine per cucire e ricamare — Piante tessili — Tessitore — Tintore — Tintura della seta.

INDUSTRIE DIVERSE.

Arti grafiche fotomeccaniche — Asfalto — Carta (Industria della) — Colori e vernici — Concia delle pelli — Falegname ed ebanista — Fiori artificiali — Fonditore in tutti i metalli — Gioielleria, oreficeria — Imbalsamatore — Industria della carta — Industria saponiera — Industria stearica — Litografia — Marmista — Meccanico — Metalli preziosi — Modellatore meccanico — Falegname ed ebanista — Operaio — Orologeria — Piante industriali — Piccole industrie — Pietre preziose — Pirotecnia moderna — Pomologia artificiale — Ragioneria industriale — Saggiatore — Stenografia — Tipografia — Tornitore meccanico — Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini.

INGEGNERIA, COSTRUZIONI, ecc.

Arte mineraria — Calci e cementi — Cubatura dei legnami — Curve delle ferrovie e delle strade — Dinamica — Disegnatore meccanico — Disegno industriale — Dizionario tecnico — Fabbricati civili di abitazioni — Fognatura cittadina — Idraulica — Ingegnere civile — Lavori in terra — Leghe metalliche — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Macchine agricole — Macchine per cucire e ricamare — Meccanica — Meccanico — Meccanismi (500) — — Modellatore meccanico — Molini — Momenti resistenti e pesi di travi metalliche — Peso dei metalli, ferri quadrati, ecc. — Prontuario dell'agricoltore e dell'ingegnere agronomo estimatore — Resistenza dei materiali — Riscaldamento e ventilazione — Siderurgia — Tempera e cementazione — Tornitore meccanico.

LETTERATURA.

Bibliografia — Dantologia — Dizionario bibliografico — Letteratura albanese, americana, danese, ebraica, egiziana, francese, greca, indiana, inglese, islandese, italiana, latina, norvegiana, persiana, provenzale, romana, spagnuola e portoghese, tedesca, ungherese — Letterature elleniche — Letterature slave — Omero — Shakespeare.

LINGUISTICA e FILOLOGIA.

Arabo volgare — Arte del dire — Dizionario Eritreo — Dizionario milanese — Dizionari diversi — Esercizi di traduzione di varie lingue — Esercizi greci — Esercizi latini — Filologia classica — Fonologia greca, italiana, latina — Glottologia — Grammatica albanese, francese, galla, greca, greca moderna, inglese, italiana, latina, olandese, rumena, russa, spagnuola, tedesca — Lingua gotica — Lingue dell'Africa — Lingue neolatine — Lingue straniere (Studio delle) — Metrica dei greci e dei romani — Morfologia greca — Morfologia italiana — Religioni e lingua dell'India inglese — Rettorica — Ritmica e metrica italiana — Sanscrito — Stilistica — Tigrè — Verbi greci anomali — Verbi latini — Volapük.

MATEMATICHE.

Algebra complementare — Algebra elementare — Aritmetica pratica — Aritmetica razionale — Astronomia — Calcolo delle variazioni — Calcolo infinitesimale — Celerimensura — Compensazione degli errori — Determinanti — Disegno assonometrico — Disegno geometrico — Disegno di proiezioni ortogonali — Disegno topografico — Enciclopedia di matematica superiore — Esercizi di algebra elementare, di calcolo infinitesimale, di geometria — Funzioni ellittiche — Geometria analitica, descrittiva, metrica o trigonometrica, pratica, projettiva, pura — Gnomonica — Interesse e sconto — Logaritmi — Logica matematica — Metrologia universale — Prospettiva — Regolo calcolatore — Società di mutuo soccorso — Statica e sua applicazione agli strumenti metrici — Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi — Telemetria — Termodinamica — Teoria dei numeri — Triangolazioni topografiche.

MEDICINA e CHIRURGIA.

Acque minerali e termali — Anatomia e fisiologia comparata — Anatomia microscopica — Anatomia topografica — Animali parassiti dell'uomo — Assistenza degli infermi —

Climatologia — Farmacista — Fisiologia — Igiene della vista Igiene del lavoro, della vita pubblica e privata, igiene privata, pubblica, rurale, scolastica, veterinaria — Immunità e resistenza alle malattie — Impiego ipodermico e dosatura dei rimedi — Infezione, disinfezione e disinfettanti — Materia medica moderna — Medicatura antisettica — Psicologia fisiologica — Semeiotica — Soccorsi d'urgenza — Veleni — Zoonosi.

MUSICA.

Armonia — Cantante — Pianista — Storia della musica — Strumentazione — Strumenti ad arco e musica da camera.

NAVIGAZIONE.

Attrezzatura, manovra delle navi, ecc. — Canottaggio — Costruttore navale — Doveri del Macchinista navale — Filonauta — Ingegnere navale — Macchinista navale — Marino.

RELIGIONE.

Bibbia — Diritto ecclesiastico — Mitologia comparata, greca, romana — Religioni e lingue dell'India inglese.

SPORT, GIUOCHI e COLLEZIONI.

Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Biliardo — Cacciatore — Cane (Allevatore del) — Canottaggio — Cavallo — Ciclista — Codice cavalleresco — Dizionario filatelico — Dizionario dei termini delle corse — Duellante — Filonauta — Ginnastica (Storia della) — Ginnastica femminile — Ginnastica maschile — Giuochi ginnastici — Nuotatore — Proverbi sul cavallo — Scacchi — Scherma.

STORIA e CRONOLOGIA.

Atlante geografico-storico d'Italia — Paleoetnologia — Risorgimento italiano — Rivoluzione francese — Storia antica — Storia e cronologia medioevale e moderna — Storia dell'arte militare — Storia italiana.

STORIA NATURALE.

Anatomia e fisiologia comparata — Anatomia microscopica — Anatomia vegetale — Animali parassiti dell'uomo — Batteriologia — Botanica — Cane — Cavallo — Coleotteri — Colombi domestici — Coniglicoltura — Cristallografia — Ditteri — Embriologia e morfologia generale — Fisiologia — Fisiologia vegetale — Funghi e tartufi — Geologia — Imbalsamatore — Imenotteri, neurotteri, ecc. — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri — Maiale — Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate — Microscopio — Mineralogia generale e descrittiva — Naturalista viaggiatore — Ostricoltura e mitilicoltura — Paleoetnologia — Pietre preziose — Piscicoltura — Pollicoltura — Protistologia — Sismologia — Tabacco — Tecnica protistologica — Vulcanismo — Zoologia.

500 MANUALI HOEPLI

Pubblicati sino al 1° Marzo 1897.

L. c.

Abitazioni degli animali domestici, del Dott. U. Barpi, di pag. XVI-372, con 168 incisioni . . . . . 4 —

Acetilene (L'), del Dott. Luigi Castellani, di pagine XVI-125 . . . . 2 —

Acido solforico, Acido nitrico, Acido sodico, Acido muriatico (Fabbricazione dell'), del Dott. V. Vender. (In lavoro).

Acque (Le) **minerali e termali del Regno d'Italia,** di Luigi Tioli. Topografia — Analisi — Elenchi — Denominazione delle acque — Malattie per le quali si prescrivono — Comuni in cui scaturiscono — Stabilimenti e loro proprietarî — Acque e fanghi in commercio — Negozianti d'acque minerali, di pag. XXII-552. 5 50

Adulterazione e falsificazione degli alimenti, del Dott. Prof. L. Gabba, di pagine VIII-211 . . . 2 —

Agricoltore. — Vedi *Prontuario.*

Agronomia, del Prof. Carega di Muricce, 3ª ediz. riveduta ed ampliata dall'autore, di pag. XII-210 . . 1 50

Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. Cantamessa, di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . . . 3 —

— Vedi anche *Cognac.*

L. c.

Algebra complementare, del Prof. S. PINCHERLE:
Parte I. *Analisi algebrica,* di pag. VIII-174 . . . 1 50
Parte II. *Teoria delle equazioni*, di pag. IV-169 con 4 incisioni nel testo 1 50

Algebra elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 6ª edizione, di pag. VIII-210 . . . . 1 50
— Vedi anche *Esercizi di algebra.*

Alighieri (Dante). — Vedi *Dantologia.*

Alimentazione, di G. STRAFFORELLO, di pag. VIII-122. 2 —
— Vedi anche *Adulterazione alimenti — Conserve alimentari — Frumento e mais — Funghi e tartufi — Latte, burro e cacio — Panificazione razionale.*

Alimentazione del bestiame, del Prof. T. POGGI. (In lavoro).

Alpi (Le), di J. BALL, traduz. del Prof. I. CREMONA, di pag. VI-120. . . . . 1 50
— Vedi anche *Dizionario alpino — Prealpi.*

Amatore (L') di majoliche e porcellane, di L. DE MAURI, illustrato da oltre 2900 marche. (In lavoro).

Amatore (L') **di oggetti d'arte e di curiosità,** di L. DE MAURI, di 600 pag. adorno di numerose incisioni e marche. Contiene le materie seguenti: Pittura — Incisione — Scoltura in avorio — Piccola scoltura — Vetri — Mobili — Smalti — Ventagli — Tabacchiere — Orologi — Vasellame di stagno — Armi ed armature — Dizionario complementare di altri infiniti oggetti d'arte e di curiosità 6 50

Amministrazione. — Vedi *Computisteria — Contabilità — Ragioneria.*

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, del Dott. M. BARTH, con prefazione del Dott. I. Nessler, traduzione del Prof. D. F. C. ENRICO COMBONI, di pagine 142 con 7 incisioni intercalate nel testo. . . 2 —

Analisi volumetrica applicata ai prodotti commerciali e industriali, del Prof. P. E. ALESSANDRI, di pag. X-342. con 52 incisioni 4 50

Anatomia e fisiologia comparata, del Prof. R. BESTA, di pag. VII-218 con 34 incisioni 1 50

L. c.

Anatomia microscopica (Tecnica di), del Prof. D. Carazzi, di pag. xi-211, con 5 incisioni 1 50

Anatomia pittorica, del Prof. A. Lombardini, di pag. vi-118, con 39 incisioni . . . . 2 —

Anatomia topografica (Compendio di), del Dott. Prof. C. Falcone, di pag. xv-395, con 30 incisioni (volume doppio) . . . . 3 —

Anatomia vegetale, del Dottor A. Tognini, di pagine xvi-274 con 141 incisioni (volume doppio) . . . 3 —

Animali da cortile, del Prof. P. Bonizzi, di pagine xiv-238 con 39 incisioni. . . . . 2 —

— Vedi anche *Colombi — Coniglicoltura — Majale — Pollicoltura.*

Animali domestici. — Vedi *Abitazioni — Alimentazione del bestiame — Bestiame.*

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** del Prof. F. Mercanti, di pag. iv-179, con 33 incisioni 1 50

Antichità private dei romani, del Prof. W. Kopp, traduzione con note ed aggiunte del Prof. N. Moreschi, 2ª edizione, di pagine xii-130 . . . . 1 50

— Vedi anche *Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità — Archeologia.*

Antropologia, del Prof. G. Canestrini, 2ª edizione, di pag. vi-232, con 23 incisioni 1 50

Apicoltura del Prof. G. Canestrini, 2ª edizione riveduta di pag. iv-196, con 43 incisioni . . . . . . 2 —

Arabo volgare (Manuale di), di De Sterlich e Dib Khaddag. Raccolta di 1200 vocaboli e 600 frasi più usuali, 2ª edizione. (In lavoro).

Araldica (Grammatica), di F. Tribolati, 3ª edizione, di pag. viii-120, con 98 incisioni e un'appendice sulle "Livree" 2 50

— Vedi anche *Vocabolario araldico.*

Archeologia dell'arte, del Prof. I. Gentile:

Parte I. *Storia dell'arte greca*, testo, 2ª ed. (esaur.).

" *Atlante* per l'opera suddetta, di *149 tavole*, indice . . . . 4 —

L. c.

Parte II. *Storia dell'arte etrusca e romana*, testo, 2ª ediz. di pag. IV-228. . . . . 2 —
„ *Atlante* per l'opera suddetta, di *79 tavole*, indice . . . . 2 —

Architettura italiana, dell'Arch. A. MELANI, Parte I. Architettura Pelasgica, Etrusca, Italo-Greca e Romana. Parte II. Architettura Medioevale fino alla Contemporanea, 2 vol., di pag. XVIII-214 e XII-216, con 46 tavole e 113 figure, 2ª edizione. . . . . 6 —

Aritmetica pratica, del Prof. Dott. F. PANIZZA, di pag. VIII-188 . . . . 1 50

Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. PANIZZA, 2ª ediz. riveduta di pag. XII-210. . . . . 1 50

Armi e armature. — Vedi *Amatore d' oggetti d'arte e di curiosità — Storia dell'arte militare.*

Armonia (Manuale di), del Prof. G. BERNARDI, con prefazione di E. ROSSI, di pag. XII-288 . . . . . . 3 50

Arte antica. — Vedi *Amatore d' oggetti d' arte e di curiosità — Archeologia — Decorazione e industrie — Pittura — Restauratore dipinti — Scoltura.*

Arte del dire (L'), del Prof. D. FERRARI, Manuale di retorica per lo studente delle Scuole secondarie, 3ª ediz., corretta ed ampliata, di pag. XIII-246 con quadri sinottici 1 50

— Vedi anche *Rettorica — Ritmica — Stilistica.*

Arte militare. — Vedi *Storia dell'arte militare.*

Arte mineraria, dell'Ing. Prof. V. ZOPPETTI, di pagine IV-192, con 112 figure in 14 tavole . . . . . 2 —

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche** ossia la Eliografia nelle diverse applicazioni (Fotozincotipia, fotozincografia, fotolitografia, fotocollografia, fotosilografia, la sincromia, ecc.), con un Dizionarietto tecnico e un cenno storico sulle arti grafiche; 2ª ediz. corretta ed accresciuta, con molte illustrazioni, di pag. VIII-197 con 12 tavole illustrate . . . . 2 —

— Vedi anche *Dizionario fotografico — Fotografia per dilettanti — Fotocromatografia — Fotografia ortocromatica — Litografia — Ricettario fotografico.*

L. c.

Asfalto (L'), fabbricazione, applicazione, dell'Ing. E. Righetti, con 22 incisioni, di pag. VIII-152 . . . . 2 —

Assicurazione sulla vita, di C. Pagani, di p. VI-151. 1 50

Assistenza degli infermi nell'Ospedale ed in famiglia, del Dott. C. Calliano, 2ª edizione di pagine XXIV-448, con 7 tavole 4 50

— Vedi anche *Igiene — Impiego ipodermico — Materia medica — Medicatura antisettica — Semeiotica — Soccorsi d'urgenza.*

Astronomia, di J. N. Lockyer, nuova versione libera con note ed aggiunte del Prof. G. Celoria, 4ª ediz., di pagine XI-258 con 51 incisioni 1 50

— Vedi anche *Cosmografia — Gnomonica — Gravitazione — Ottica — Spettroscopio.*

Atlante geografico-storico dell'Italia, del Dott. G. Garollo, 24 tav. con pag. VIII-67 di testo e un'appen. 2 —

Atlante geografico universale, di Kiepert, con notizie geografiche e statistiche del Dott. G. Garollo, 9ª ediz. (dalla 81000 alla 90000 copia), con 26 carte, testo e indice alfabetico . . . . 2 —

Attrezzatura, manovra delle navi e segnalazioni marittime, di F. Imperato, di pag. XXII-360, con XV tavole litografate e 232 incisioni nel testo. . 4 50

— Vedi anche *Canottaggio — Costruttore navale — Doveri del macchinista navale — Ingegnere navale — Filonauta — Macchinista navale — Marine (Le) da guerra — Marino.*

Bachi da seta, del Prof. T. Nenci, di pag. VI-276, 3ª ediz. con 41 incisioni e 2 tavole. (In lavoro).

— Vedi anche *Gelsicoltura — Industria della seta — Tintura della seta.*

Balistica. — Vedi *Esplodenti — Pirotecnia — Storia dell'arte militare antica e moderna.*

Batteriologia, dei Professori G. e R. Canestrini, 2ª ediz. in gran parte rifatta, di pag. X-274 con 37 inc. 1 50

— Vedi anche *Anatomia microscopica — Animali parassiti — Microscopio — Protistologia — Tecnica protistologica.*

L. c.

Bestiame (Il) **e l'agricoltura in Italia,** del Prof. F. ALBERTI, di pag. VIII-312, con 22 zincotipie . . . 2 50

Biancheria. — Vedi *Disegno, taglio e confezione di biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi.*

Bibbia (Man. della), del Prof. G. M. ZAMPINI, di pagine XII-308 . . . . 2 50

Bibliografia, di G. OTTINO, 2ª ediz., riveduta di pagine VI-166, con 17 incisioni . . . . 2 —

— Vedi anche *Dizionario bibliografico.*

Bibliotecario (Manuale del), di PETZHOLDT, traduzione sulla 3ª edizione tedesca, di G. BIAGI e G. FUMAGALLI, di pag. XX-364 con un'appendice di pag. 213. 7 50

— Vedi anche *Bibliografia — Dizionario bibliografico.*

Biliardo (Il giuoco del), del Comm. J. GELLI, di pagine XV-179, con 79 illustrazioni 2 50

Biografia. — Vedi *Cristoforo Colombo — Dantologia — Omero — Shakespeare.*

Borsa (Operazioni di). — Vedi *Debito pubblico — Valori pubblici.*

Botanica, del Prof. I. D. HOOKER, traduzione del Prof. N. PEDICINO, 4ª ediz., di pag. VIII-134, con 68 inc. 1 50

— Vedi anche *Anatomia vegetale — Fisiologia vegetale.*

Botti. — Vedi *Enologia.*

Burro. — Vedi *Latte — Caseificio.*

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, di pagine VI-267, con 10 tavole e 14 incisioni 2 50

— Vedi anche *Cane (Allevatore del).*

Calci e Cementi (Impiego delle), per l'Ing. L. MAZZOCCHI, di pag. XII-212 con 49 incisioni . . . . . 2 —

Calcolo infinitesimale, del Prof. E. PASCAL:

Parte I. *Calcolo differenziale,* di pag. IX-316 con 10 incisioni (volume doppio) . . . . 3 —

„ II. *Calcolo integrale,* di pag. VI-318 con 15 incisioni (volume doppio). . . . . 3 —

„ III. *Calcolo delle variazioni e Calcolo delle differenze finite,* di p. XII-330 (vol. doppio). 3 —

— Vedi anche *Esercizi di calcolo infinitesimale.*

L. c.

Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 69 tavole di modelli dei principali caratteri conformi ai programmi governativi del Professore R. Percossi, con 35 fac-simili di scritture, elegantemente legato, tascabile, con leggío annesso al manuale per tenere il modello . . . . 3 —
— Vedi anche *Monogrammi — Ornatista — Paleografia.*
Calore (Il), del Dott. E. Jones, trad. di U. Fornari, di pag. VIII-296, con 98 incisioni (volume doppio) . . 3 —
Cancelliere. — Vedi *Conciliatore.*
Cane (Manuale dell'amatore ed allevatore del), di Angelo Vecchio, di pag. XVI-403, con 129 inc. e 51 tav. 6 50
— Vedi anche *Cacciatore.*
Canottaggio (Man. di), del Cap. G. Croppi (In lav.).
Cantante (Man. del), di L. Mastrigli, di pag. XII-132. 2 —
Cantiniere. Lavori di cantina mese per mese, di A. Strucchi, di pagine VIII-172, con 30 incisioni . . . 2 —
Carta. — Vedi *L'industria della.*
Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto sulla storia della Cartografia, del Prof. E. Gelcich, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni . . . . . 2 —
— Vedi anche *Celerimensura — Disegno topografico — Telemetria — Triangolazione.*
Caseificio, di L. Manetti, 2ª edizione, completamente rifatta dal Prof. G. Sartori, di pag. IV-212, con 34 incisioni. . . . . 2 —
— Vedi anche *Bestiame — Latte, burro e cacio.*
Catasto (Il nuovo) **italiano,** dell'Avv. E. Bruni, di pag. VII-346 (volume doppio) . . . . 3 —
Cavallo (Il), del Colonnello C. Volpini, 2ª edizione riveduta ed ampliata di pag. VI-165, con 8 tavole . . 2 50
— V. anche *Dizionario termini delle corse — Proverbi.*
Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione, dell'Ing. E. Jona, di pag. XVI-338, con 188 fig. e 1 carta delle comunicazioni telegrafiche sottomarine 5 50
— Vedi anche *Telegrafia.*

L. c.

Celerimensura (Manuale pratico di), e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. BORLETTI, di pag. VI-148 con 29 incisioni 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ingegnere G. ORLANDI, di pag. 1200 con quadro generale d'interpolazioni . . . . 18 —

Cemento. — Vedi *Calci e cementi.*

Cementazione. — Vedi *Tempera.*

Ceralacche. — Vedi *Vernici e lacche.*

Ceramiche. — Vedi *Amatore di majoliche.*

Chimica, del Prof. H. E. ROSCOE, traduzione del Prof. A. PAVESI, di pag. VI-24, con 36 incisioni, 4ª edizione 1 50

Chimica agraria, del Prof. Dott. A. ADUCCO, di pag. VIII-328 . . . . 2 50

Chimico (Manuale del) **e dell'industriale,** ad uso dei Chimici analitici e tecnici, degli industriali, ecc., del Dott. Prof. L. GABBA, 2ª edizione (In lavoro).

Ciclista (Manuale del), di A. GALANTE, riccamente illustrato, 2ª ediz. interamente rifatta da GUSTAVO MACCHI. (In lavoro).

Climatologia, del Dott. L. DE MARCHI, di p. X-204, con 6 carte 1 50

— Vedi anche *Geografia fisica — Igroscopi — Meteorologia.*

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale coordinati e annotati dal Prof. Avv. L. FRANCHI, raccolti in 2 grossi volumi legati in tutta pelle flessibile.

Vol. I. Contenente: Codice civile — di procedura civile — di commercio — penale — procedura penale — della marina mercantile — penale per l'esercito — penale militare marittimo, *otto codici* di pag. VI-1160. . 7 50

Vol. II. Conterrà le leggi usuali. (In lavoro).

Codice civile del Regno d'Italia, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, di pag. 215 . 1 50

L. c.

Codice di procedura civile, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. Franchi, di pag. 154. . . 1 50

Codice di commercio, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. Franchi, di pag. 148 . . . . . 1 50

Codice penale e di procedura penale, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. Franchi, di pag. 211 . . . . 1 50

Codice di Marina Mercantile, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. Franchi, di pag. 260 . . . . 1 50

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. Franchi, di p. 163. 1 50

Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello), opera premiata con medaglia d'oro, del Comm. J. Gelli, 8ª ediz. riveduta di pag. xv-272. . . . . 2 50

— Vedi anche *Duellante.*

Codice doganale italiano con commento e note, dell'Avv. E. Bruni, di pag. xx-1078 con 4 inc. 6 50

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di Dal Piaz, corredato di annotazioni del Cav. G. Prato, di pag. x-168, con 37 incisioni . . . . . . 2 —

— Vedi anche *Alcool.*

Coleotteri italiani, del Dott. A. Griffini, di pagine xvi-334 con 215 incisioni (volume doppio) . . . 3 —

— Vedi anche *Animali parassiti — Ditteri — Imenotteri — Lepidotteri.*

Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. Bonizzi, di pagine vi-210, con 29 incisioni . . . 2 —

— Vedi anche *Animali da cortile — Pollicoltura.*

Colori e la pittura (La scienza dei), del Prof. L. Guaita, di pag. 248 . . . . 2 —

Colori e vernici, di G. Gorini, 3ª ediz. totalmente rifatta, per l'Ing. G. Appiani, di pag. x-282, con 13 inc. 2 —

— Vedi anche *Luce e colori — Vernici.*

L. c.

Coltivazione ed industrie delle piante tessili, propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pagine XII-476, con 72 incisioni . . . . 5 —

— Vedi anche *Filatura — Tessitore.*

Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. CROTTI, di pag. IV-160 . . . . 2 —

Compositore-Tipografo (Manuale dell'allievo), di S. LANDI. — Vedi *Tipografia*, vol. II.

Computisteria, del Prof. V. GITTI:

Vol. I. Computisteria commerciale, 3ª ediz. di pagine VI-168. . . . . 1 50

Vol. II. Computisteria finanziaria, di pag. VIII-156 . 1 50

Computisteria agraria, del Prof. L. PETRI, di pagine VI-212 . . . . 1 50

— Vedi anche *Contabilità — Ragioneria.*

Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210. . . . . . 2 —

Conciliatore (Manuale del), dell'Avv. G. PATTACINI. Guida teorico-pratica con formulario completo pel Conciliatore, Cancelliere, Usciere e Patrocinatore di cause. 3ª edizione riveduta ed ampliata dall'autore e messa in armonia con l'ultima legge 28 luglio 1895, di pagine x-465 . . . . 3 —

Concimi, del Prof. A. FUNARO, di pag. VII-253. . . 2 —

— Vedi anche *Humus.*

Confezione d'abiti per signora e l'arte del taglio, compilato da EMILIA COVA, di pag. VIII-91, con 40 tavole illustrative . . . . 3 —

— Vedi anche *Disegno, taglio e confezione di biancheria.*

Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI, di pagine VIII-173, con 141 incisioni e 9 tavole in sincromia 2 50

L. c.

Curve. Manuale pel tracciamento delle curve delle Ferrovie e Strade carrettiere di G. H. Kröhnke, traduzione di L. Loria, 2ª edizione, di pagine 164, con 1 tavola 2 50

Dantologia, del Dott. G. A. Scartazzini, 2ª edizione. Vita ed Opere di Dante Alighieri, di pagine vi-408 (volume doppio) . . . . 3 —

Debito (Il) **pubblico italiano** e le regole e i modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. Azzoni, di pag. viii-376 (volume doppio) . . . . 3 —

— Vedi anche *Operazioni di borsa — Valori pubblici.*

Decorazione e industrie artistiche, dell'Architetto A. Melani, 2 volumi, di pagine xx-460, con 118 incisioni . . . . 6 —

Determinanti e applicazioni, del Prof. E. Pascal, di pag. viii-330 (volume doppio) . . . . 3 —

Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari del Prof. G. Soli, di pag. viii-214. 1 50

Digesto (Il), del Prof. C. Ferrini, di pag. iv-134 . . 1 50

Dinamica elementare, del Dott. C. Cattaneo, di pag. viii-146, con 25 figure 1 50

— Vedi anche *Termodinamica.*

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, del Prof. D. Maffioli, 9ª ediz., di pag. xvi-229 . . . . 1 50

Diritto amministrativo giusta i programmi governativi, ad uso degli Istituti tecnici, del Prof. G. Loris, 3ª edizione, di pag. xxiv-541 (volume doppio) . . . 3 —

— Vedi anche *Contabilità comunale — Contabilità generale dello Stato — Legge comunale.*

Diritto civile (Compendio di), del Prof. G. Loris, giusta i programmi governativi ad uso degli Istituti tecnici, di pag. xvi-336 (volume doppio) . . . . 3 —

Diritto civile italiano, del Prof. C. Albicini, di pag. viii-128 . . . . 1 50

— Vedi anche *Codice civile — Codice di procedura civile.*

L. c.

Diritto commerciale italiano, del Prof. E. VIDARI, di pag. x-514 (volume doppio) . . . . 3 —
— Vedi anche *Codice commerciale — Mandato.*

Diritto comunale e provinciale. — Vedi *Contabilità comunale — Diritto amministrativo — Legge comunale.*

Diritto costituzionale, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, 2ª edizione, di pag. XVI-370 (volume doppio). . 3 —

Diritto ecclesiastico, di C. OLMO, di pagine XII-472 (volume doppio) . . . . 3 —

Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, di pag, XVI-392 (volume doppio) . . . 3 —

Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, di pag. XII-320 (volume doppio) . . . 3 —

Diritto penale, dell'Avv. A. STOPPATO, di p. VIII-192. 1 50
— Vedi anche *Codice penale e di procedura penale — Codice penale militare e penale militare marittimo.*

Diritto romano, del Prof. C. FERRINI, di pag. VIII-132. 1 50

Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Aritmetica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a vapore, Propulsori, per V. GOFFI, 2ª edizione riveduta, di pag. XXI-435, con 363 figure . . 5 —

Disegno. I principii del Disegno, del Prof. C. BOITO, 4ª edizione, di pag. VIII-200, con 61 silografie. . . . 2 —
— Vedi anche *Monogrammi — Ornatista.*

Disegno assonometrico, del Prof. P. PAOLONI, di pag. IV-122 con 21 tavole e 23 figure nel testo . . . 2 —

Disegno geometrico, del Prof. A. ANTILLI, di pagine VIII-88, con 6 figure nel testo e 27 tavole litogr., 2ª edizione. . . . . 2 —

Disegno industriale, di E. GIORLI. Corso regolare di disegno geometrico e delle proiezioni. Degli sviluppi delle superfici dei solidi. Della costruzione dei principali organi delle macchine. Macchine utensili, di pagine VIII-218, con 206 problemi risolti e 261 figure . 2 —

L. c.

Disegno di proiezioni ortogonali, del Prof. D. Landi, di pag. VIII-152, con 132 incisioni . . . . . 2 —
— Vedi anche *Proiezioni — Prospettiva.*

Disegno topografico, del Capitano G. Bertelli, 2ª edizione, di pag. VI-137, con 12 tavole e 10 incis. 2 —
— Vedi anche *Cartografia — Celerimensura — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni.*

Disegno, taglio e confezione di biancheria (Manuale teorico pratico di), di E. Bonetti, con un Dizionario di nomenclatura, di pagine VIII-216 con 40 tavole illustrative . . . . 3 —
— Vedi anche *Confezione d' abiti.*

Disinfezione. — Vedi *Infezione.*

Distillazione. — Vedi *Alcool — Analisi del vino — Analisi volumetrica — Chimica agraria — Chimico — Cognac — Farmacista — Liquorista.*

Ditteri italiani, di Paolo Lioy (*Entomologia III*), di pag. VII-356, con 227 incisioni (volume doppio) . . 3 —
— Vedi anche *Animali parassiti — Coleotteri — Imenotteri — Lepidotteri.*

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani*, dell'Ing. E. Bignami-Sormani. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia*, dell'Ing. C. Scolari, di pag. XXII-310 . . . . . . 3 50
— Vedi anche *Alpi — Prealpi.*

Dizionario bibliografico, di C. Arlia, di pagine 100. . . . . 1 50
— Vedi anche *Bibliografia — Bibliotecario.*

Dizionario Eritreo (Piccolo) **Italiano-arabo-amarico,** raccolta dei vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella colonia eritrea, di A. Allori, di pagine XXXIII-203. . . . . 2 50
— Vedi anche *Arabo volgare — Grammatica galla — Lingue d'Africa — Tigré.*

Dizionario filatelico, per il raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografia, del Comm. J. Gelli, di pag. LXIV-422. . . . . 4 50

L. c.

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi, e 600 formule, di L. Gioppi, di pag. VIII-600, con 95 incisioni e 10 tavole 7 50

Dizionario geografico universale, del Prof. Dottor G. Garollo, 4ª edizione completamente rifatta. Uscirà nell'autunno del 1897.

Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese, di Cletto Arrighi, di pag. 912, a due colonne. 2ª edizione 8 50

Dizionario tascabile (Nuovo) **italiano-tedesco e tedesco-italiano,** compilato sui migliori vocabolari moderni e provvisto d'un'accurata accentuazione per la pronuncia dell'italiano, di A. Fiori, 2ª ediz., completamente rifatta dal Prof. G. Cattaneo, di p. 333. 3 50

Dizionario tecnico in quattro lingue dell'Ing. E. Webber, 4 volumi.

vol. I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, di pagine IV-336 . . . . 4 —

vol. II. Deutsch-Italienisch-Französisch-Englisch. (In lavoro).

vol. III. Français-Italien-Allemand-Anglais. (In lavoro).

vol. IV. English-Italian-German-French. (In lav.).

Dizionario termini delle corse, di G. Volpini, di pag. 47 . . . . 1 —

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese e francese, disposte in un unico alfabeto, 1 vol. di pag. 1200 . . . . 8 —

Dizionario volapük. — Vedi *Volapük.*

Dogane. — V. *Codice doganale — Trasporti e tariffe.*

Dottrina popolare, in 4 lingue. (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. Sessa, 2ª ed., di pag. IV-212. 2 —

Doveri del macchinista navale e condotta della macchina a vapore marina ad uso dei macchinisti navali e degli Istituti nautici, di M. Lignarolo, di pag. XVI-303 . . . . 2 50

L. c.

Duellante (Manuale del) in appendice al *Codice cavalleresco.* Opera premiata con medaglia d'oro e con diploma d'onore, del Comm. J. Gelli, 2ª edizione, di pag. VIII-256, con 27 tavole 2 50
— Vedi anche *Codice cavalleresco — Scherma.*

Economia dei fabbricati rurali, di V. Niccoli, pag. VI-192 . . . . 2 —

Economia politica, del Prof. W. S. Jevons, traduz. del Prof. L. Cossa, 3ª ediz. riveduta di pag. XIV-174. 1 50

Elettricista (Manuale dell'), dei Proff. G. Colombo e Ferrini, di pag. VIII-204-44, con 40 incisioni . . . . 4 —

Elettricità, del Prof. Fleeming Jenkin, traduzione del Prof. R. Ferrini, di pagine XII-208, con 36 incisioni, 2ª ediz. riveduta. 1 50

Embriologia e morfologia generale, del Prof. G. Cattaneo, di pag. X-242, con 71 incisioni . . . 1 50

Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 vol. di 3375 pagine di due colonne per ogni pagina, con Appendice (146-740 voci). L'opera completa elegant. legata. . 20 —

Enciclopedia (Piccola) **di matematica superiore,** del Prof. E. Pascal. (In lavoro).

Energia fisica, del Prof. R. Ferrini, di pag. VI-108, con 15 incisioni 1 50

Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Prof. O. Ottavi, 3ª edizione interamente rifatta da A. Strucchi, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria pei calcoli relativi alle botti circolari, dell'Ing. Agr. R. Bassi, di pag. XVI-291, con 29 inc. 2 —
— Vedi anche *Alcool — Analisi del vino — Cantiniere — Cognac — Liquorista — Malattie ed alterazioni dei vini — Uva da tavola — Vino — Viticoltura.*

Enologia domestica, di R. Sernagiotto, di pagine VIII-223 . . . . 2 —

Entomologia. — Vedi *Animali parassiti — Apicoltura — Bachi da seta — Coleotteri — Ditteri italiani — Imbalsamatore — Imenotteri — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri italiani — Naturalista viaggiatore.*

L. c.

Eritrea. — Vedi *Dizionario eritreo, italiano-arabo-amarico* — *Grammatica galla* — *Lingue d'Africa* — *Prodotti agricoli del Tropico* — *Tigrè-italiano.*

Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. Strafforello, di pag. IV-170. . . . . 1 50

Esercizi di algebra elementare, del Prof. S. Pincherle, di pag. VIII-135, con 2 incisioni 1 50
— Vedi anche *Algebra.*

Esercizi di calcolo infinitesimale (Calcolo differenziale e integrale), del Prof. E. Pascal, di pagine XX-372 (volume doppio) . . . . 3 —
— Vedi anche *Calcolo infinitesimale.*

Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese, del Prof. G. Prat, di pagine VI-183 . . . . 1 50

Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della Grammatica tedesca, del Prof. G. Adler, di IV-236 . . . . 1 50

Esercizi geografici e quesiti, sull'Atlante geografico universale di R. Kiepert, di L. Hugues, 3ª edizione rifatta, di pag. VIII-208. . . . . 1 50

Esercizi greci per la 4ª classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elementari di lingua greca,* del Prof. V. Inama; del Prof. A. V. Bisconti, di pagine XXI-237 . . . . 1 50

Esercizi latini con regole (Morfologia generale), del Prof. P. E. Cereti, di pag. XII-332. . . . . . 1 50

Esercizi sulla geometria elementare, del Professore Pincherle, di pag. VIII-130 con 50 incisioni . 1 50

Esplodenti e modo di fabbricarli, di R. Molina, di pag. XX-300 . . . . 2 50
— Vedi anche *Pirotecnia.*

Estetica, del Prof. M. Pilo, di pag. XX-260 . . . . 1 50

Estimo dei terreni. Garanzia dei prestiti ipotecari e dell'equa ripartizione dell'imposta, dell' Ing. P. Filippini, di pag. XVI-328, con 3 incisioni. . . . . . 3 —

L. c.

Filatura della seta, di G. PASQUALIS. (In lavoro).

Filologia classica, greca e latina, del Prof. V. INAMA, di pag. XII-195 . . . . 1 50

Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfiliamento, del Capitano G. OLIVARI, di pag. XVI-286 . . . . 2 50

— Vedi anche *Canottaggio.*

Filosofia. — Vedi *Estetica* — *Etica* — *Filosofia morale* — *Logica* — *Psicologia* — *Psicologia fisiologica.*

Filosofia morale, del Prof. L. FRISO, di pag. XVI-336 (volume doppio) . . . . 3 —

— Vedi anche *Etica.*

Finanze. — Vedi *Debito pubblico* — *Scienza delle finanze* — *Valori pubblici.*

Fiori artificiali, Manuale del fiorista, di O. BALLERINI, di pag. XVI-278, con 144 incisioni e 1 tavola cromatica a 36 colori 3 50

Fiori. — Vedi *Botanica* — *Floricoltura* — *Orticoltura* — *Piante e fiori.*

Fisica, del Prof. BALFOUR STEWART, 5ª ediz. italiana interam. rifatta dal Prof. O. MURANI, di pag. XII-292, con 139 incisioni 1 50

Fisica (Elementi di), per gli Istituti tecnici e Licei, del Prof. O. MURANI, di pag. XX-867, con 380 incisioni e 3 tavole 5 50

— Vedi anche *Calore* — *Dinamica* — *Energia fisica* — *Luce e suono* — *Termodinamica.*

Fisiologia, di FOSTER, traduz. del Prof. G. ALBINI, 3ª ediz. di pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50

Fisiologia vegetale, del Dott. LUIGI MONTEMARTINI, con illustrazioni. (In lavoro).

— Vedi anche *Anatomia vegetale.*

Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, di pag. VIII-186, con 61 incisioni . . . . 2 —

— Vedi anche *Botanica* — *Fiori artificiali* — *Orticoltura* — *Piante e fiori.*

L. c.

Fognatura cittadina, dell'Ing. D. Spataro, di pagine x-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia. . 7 —
Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. Belluomini, di pag. 146, con 41 incisioni . . . . . 2 —
— Vedi anche *Operaio.*
Fonologia greca, del Prof. A. Cinquini. (In lavoro).
Fonologia italiana, del Prof. L. Stoppato, di pagine VIII-102 . . . . 1 50
Fonologia latina, del S. Consoli, di pag. 208. . . 1 50
Fotocromatografia (La), del Dott. L. Sassi, di pagine XXI-138, con 19 incisioni . . . . 2 —
Fotografia ortocromatica, del Dott. C. Bonacini, di pag. XVI-277 con incisioni e 5 tavole 3 50
Fotografia pei dilettanti. (Come il sole dipinge), di G. Muffone, di pag. XII-303, 3ª edizione rifatta ed aumentata, con 83 incisioni . . . . 2 —
Fotografia ed arti affini. — Vedi *Arti grafiche — Dizionario Fotografico — Litografia — Proiezioni — Ricettario fotografico.*
Francobolli. — Vedi *Dizionario filatelico.*
Frumento e mais, del Prof. G. Cantoni, di pag. VI-168, con 13 incisioni . . . . 2 —
Frutta minori (Le), di A. Pucci, di pagine VIII-192, con 96 incisioni. 2 50
Frutticoltura, del Prof. Dott. D. Tamaro, 2ª ediz., di pag. XVI-225, con 86 incisioni . . . . 2 —
Frutti artificiali. — Vedi *Pomologia artificiale.*
Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. E. Canestrini, di pag. VIII-166, con 6 incisioni. . . . . . 2 —
Funghi (I) **ed i tartufi,** loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura. Cenni di Folco Bruni, di pag. VIII-184 . . . . 2 —
Funghi mangerecci e funghi velenosi, del Dott. F. Cavara. (In lavoro).
Funzioni ellittiche, del Prof. E. Pascal, di pagine 240. 1 50

L. c.

Galvanoplastica, ed altre applicazioni dell'elettrolisi. Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica dalle pelli, ecc. del Prof. R. FERRINI, 2ª edizione, completamente rifatta, di p. XII-292, con 45 inc. 4 —

Gaz. — Vedi *Acetilene.*

Gelsicoltura, del Prof. D. TAMARO, di p. XVI-175 e 22 inc. 2 —

— Vedi anche *Bachi da seta.*

Geodesia. — Vedi *Compensazione degli errori — Celerimensura — Curve — Disegno topografico — Geometria pratica — Prospettiva — Telemetria — Triangolazioni.*

Geografia, di G. GROVE, traduzione del Prof. G. GALLETTI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-160, con 26 incis. 1 50

Geografia classica, di H. F. TOZER, traduzione e note del Prof. I. GENTILE, 5ª ediz., di pag. IV-168 . 1 50

Geografia fisica, di A. GEIKIE, traduzione sulla 6ª ediz. inglese di A. STOPPANI, 3ª ediz., di pag. IV-132, con 20 incisioni 1 50

Geologia, di A. GEIKIE, traduzione sulla 3ª edizione inglese di A. STOPPANI, 3ª edizione di pag. VI-154, con 47 incisioni 1 50

— Vedi anche *Paleoetnologia.*

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-196, con 11 incisioni 1 50

Geometria analitica del piano, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50

Geometria descrittiva, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-222, con 103 incisioni, 2ª edizione rifatta . . 1 50

Geometria metrica o trigonometrica, del Prof. S. PINCHERLE, 4ª edizione, di pagine IV-158, con 47 incisioni 1 50

Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. EREDE, 2ª edizione riveduta, di pag. X-184, con 124 incisioni . . . 2 —

— Vedi anche *Disegno assonometrico — Disegno geometrico — Disegno topografico — Geodesia — Prospettiva — Regolo calcolatore — Statica.*

L. c.

Geometria projettiva del piano e della stella, del Prof. F. Aschieri, 2ª edizione, di pag. vi-228, con 86 incisioni 1 50

Geometria projettiva dello spazio, del Prof. F. Aschieri, 2ª edizione rifatta, di pagine vi-264, con 16 incisioni. 1 50

Geometria pura elementare, del Prof. S. Pincherle, 4ª edizione, di pagine viii-159, con 112 incisioni 1 50

— Vedi anche *Esercizi di geometria.*

Giardino (Il) **infantile,** del Prof. P. Conti, di pagine iv-214, con 27 tavole (volume doppio) . . . . 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. Valletti, di pagine viii-184 . . . . 1 50

Ginnastica femminile, di F. Valletti, di pagine vi-112, con 67 illustrazioni. . . . . 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura del Comm. J. Gelli, di pag. viii-108, con 216 incisioni . 2 —

— Vedi anche *Giuochi ginnastici.*

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. Boselli, di pag. 336, con 125 incisioni . . . 4 —

Giuochi ginnastici per la gioventù delle scuole e del popolo, raccolti e descritti, di F. Gabrielli, di pag. xx-218, con 24 tavole illustrative. 2 50

— Vedi anche *Giardino infantile.*

Glottologia, del Pr. G. De Gregorio, di pag. xxxii-318 (volume doppio) . . . . 3 —

— Vedi anche *Letterature diverse — Lingua gotica — Lingue neolatine — Sanscrito.*

Gnomonica ossia **l'arte di costruire orologi solari,** lezioni popolari di B. M. La Leta, di p. viii-160. 1 50

— Vedi anche *Orologeria.*

Grafologia, del Prof. C. Lombroso, con 470 fac-simili, di pag. v-245. . . . . 3 50

Grammatica albanese, del Prof. V. Librandi. (In lavoro).

Grammatica araldica. — Vedi *Araldica.*

L. c.

Grammatica ed esercizi pratici della lingua ebraica, del Prof. I. Levi. (In lavoro).

Grammatica francese, del Prof. G. Prat, di pagine XI-287 . . . . 1 50
— Vedi anche *Esercizi di traduzione — Letteratura.*

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. Viterbo.
Vol I. Galla-Italiano, di pag. VIII-152 . . . . . 2 50
Vol. II. Italiano-Galla, di pag. LXIV-106 . . . . . 2 50

Grammatica greca. (Nozioni elementari di lingua greca), del Prof. Inama, 2ª edizione di pag. XVI-208. 1 50
— Vedi anche *Esercizi — Fonologia greca — Letteratura — Morfologia greca — Verbi greci.*

Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. Lovera, di pag. VI-154 . . . . 1 50

Grammatica inglese, del Prof. L. Pavia, di pagine XII-260 . . . . 1 50

Grammatica italiana, del Prof. T. Concari, 2ª edizione, riveduta, di pag. XVI-230 . . . . 1 50
— Vedi anche *Fonologia italiana.*

Grammatica latina, del Prof. L. Valmaggi, 2ª edizione di pag. VIII-256 . . . . 1 50
— Vedi anche *Esercizi latini — Fonologia latina — Letteratura romana — Verbi latini.*

Grammatica della lingua olandese, di M. Morgana, di pag. VIII-224 (volume doppio) . . . . . . 3 —

Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. Lovera, di pag. VIII-200 . . . 1 50

Grammatica russa, del Prof. Voinovich, di pag. X-272 (volume doppio) . . . . 3 —

Grammatica sanscrita. — Vedi *Sanscrito.*

Grammatica spagnuola, del Prof. L. Pavia, di pagine XII-194 . . . . 1 50
— Vedi anche *Letteratura.*

Grammatica tedesca, del Prof. L. Pavia, di pagine XVIII-254 . . . . 1 50
— Vedi anche *Esercizi di traduzione — Letteratura.*

L. c.

Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare di Sir G. B. AIRY, traduzione, note ed aggiunte di F. PORRO, con 50 incisioni, di pag. XXII-176 . . . . 1 50

Grecia antica. — Vedi *Archeologia* (Parte I) — *Storia antica.*

Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali,** del Prof. A. CASALI. di pag. XVI-220 . . 2 —
— Vedi anche *Concimi.*

Idraulica, del Prof. Ing. T. PERDONI. (In lavoro).

Idroterapia. — Vedi *Acque.*

Igiene. — Vedi *Acque minerali — Fognatura cittadina — Igiene della vista — Igiene del lavoro — Igiene vita pubblica e privata — Igiene privata e medicina popolare — Igiene pubblica — Igiene rurale — Igiene scolastica — Igiene veterinaria — Immunità — Infezione, disinfezione e disinfettanti — Medicatura antisettica.*

Igiene della vista sotto il rispetto scolastico, del Dott. A. LOMONACO. (In lavoro).

Igiene del lavoro, di TRAMBUSTI A. e SANARELLI, di pagine VIII-362, con 70 incisioni 2 50

Igiene della vita pubblica e privata, del Dott. G. FARALLI, di pag. XII-250 . . . . 2 50

Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, traduzione di E. PARIETTI sulla 7ª edizione tedesca, con una introduzione di G. SORMANI, di pag. XII-278 . . . . 2 50

Igiene pubblica, del Dott. C. GORINI. (In lavoro).

Igiene rurale, di A. CARRAROLI, di pagine X-470 (volume doppio) . . . . 3 —

Igiene scolastica, di A. REPOSSI, 2ª edizione, di pag. IV-246 . . . . 2 —

Igiene veterinaria, del Dottor U. BARPI, di pagine VIII-228 . . . . 2 —
— Vedi anche *Immunità e resistenza — Zootecnica — Zoonosi.*

L. c.

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. CANTONI, di pag. XII-146, con 24 inc. e 7 tab. 1 50
— Vedi anche *Climatologia — Meteorologia.*

Illuminazione. — Vedi *Acetilene.*

Illuminazione elettrica (Impianti di), dell'Ing. E. PIAZZOLI, 3ª ediz. interamente rifatta, con 300 incis. 6 50

Imbalsamatore (Manuale dell'), preparatore tassidermista, di R. GESTRO, 2ª ediz., riveduta, di pag. XII-148, con 38 incisioni . . . . 2 —
— Vedi anche *Naturalista viaggiatore — Zoologia.*

Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani, del Dott. A. GRIFFINI, di pag. XVI-687, con 243 incisioni (volume triplo) 4 50
— Vedi anche *Animali parassiti — Coleotteri — Ditteri — Lepidotteri.*

Immunità e resistenza alle malattie, di B. GALLI VALERIO, di pag. VIII-218 . . . . 1 50
— Vedi anche *Igiene veterinaria — Zootecnica — Zoonosi.*

Impiego (L') **ipodermico e la dosatura dei rimedi.** Manuale di terapeutica del Dott. G. MALACRIDA, di pagine 305 . . . . 3 —

Imposte dirette (Riscossione delle), dell'Avv. E. BRUNI, di pag. VIII-158 . . . . 1 50
— V. anche *Proprietario di case — Ricchezza mobile.*

Incisioni. — Vedi *Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.*

Industria (L') **dei molini e la macinazione del frumento,** di C. SIBER-MILLOT costruttore di molini, di pag. 330, con 101 incisioni nel testo e 3 tavole. . 5 —

Industria della carta, dell'Ing. L. SARTORI, di pag. VII-326, con 106 incisioni e 1 tavola 5 50

Industria della seta, del Prof. L. GABBA, 2ª edizione, di pag. IV-208 . . . . 2 —

Industria (L') **saponiera,** con alcuni cenni sull'industria della soda e della potassa. Materia prima e fabbricazione in generale. Guida pratica dell'Ingegnere E. MARAZZA, di pag. VII-410, con 111 fig. e molte tab. 6 —

L. c.

Industria (L') **stearica.** Manuale pratico dell'Ing. E. Marazza, di pagine 288, con 76 incisioni e con molte tabelle . . . . 5 —

Infezione, disinfezione e disinfettanti, del Dott. Prof. P. E. Alessandri, di pagine VIII-190, con 7 incisioni . . . . 2 —

Ingegnere agronomo. — Vedi *Prontuario dell'agricoltore.*

Ingegnere civile. Manuale dell'Ingegnere civile e industriale, del Prof. G. Colombo, 15ª ediz. (37°, 38° e 39° migliaio). (In lavoro).

Il medesimo tradotto in francese da P. Marcillac. 5 50

Ingegnere navale. Prontuario di A. Cignoni, di pagine XXXII-292, con 36 figure. Legato in tela L. 4 50, in pelle 5 50

Insetti nocivi, del Prof. F. Franceschini, di pagine VIII-264, con 96 incisioni. . . . . 2 —

Insetti utili, del Prof. F. Franceschini, di pag. XII-160, con 43 incisioni e 1 tavola . . . . 2 —

Interesse e sconto, del Prof. E. Gagliardi di pagine VI-204. . . . . 2 —

— Vedi anche *Prontuario di valutazione.*

Ipoteche (Manuale per le), del Prof. Avv. A. Rabbeno, di pag. XVI-247 . . . . 1 50

— Vedi anche *Proprietario di case.*

Ittiologia. — Vedi *Ostricoltura — Piscicoltura — Zoologia*, vol. II.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. Sartori, di pagine X-162, con 24 incisioni . . . . 2 —

— Vedi anche *Caseificio.*

Lavori in terra (Manuale di), dell'Ing. B. Leoni, di pag. XI-305, con 38 incisioni (volume doppio). . . . 3 —

Lavori femminili. — Vedi *Confezione d'abiti per signora e l'arte del taglio — Disegno, taglio e confezioni di biancheria — Macchine da cucire e da ricamare — Monogrammi — Ornatista.*

L. c.

Legatore di libri, con molte illustrazioni dell'Ing. L. Marocchino. (In lavoro).

Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata dall'Avv. E. Mazzoccolo, 3ª ediz., con l'aggiunta di due regolamenti e di due indici, di pag. VIII-728 . 4 50

Legge comunale (Appendice alla) **del 22 e 23 luglio 1894,** dell'Avv. E. Mazzoccolo, di p. VIII-256. 2 —

Leggi usuali (Raccolta delle). (In lavoro).

Leghe metalliche, del Prof. I. Ghersi. (In lavoro).

Legislazione rurale, secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici, dell'Avv. E. Bruni, di pag. XI-423 (volume doppio) . . . . 3 —

Legnami. — Vedi *Cubatura dei legnami — Falegname.*

Lepidotteri italiani, del Dott. A. Griffini, di pagine XIII-248, con 149 incisioni 1 50

— Vedi anche *Animali parassiti — Coleotteri — Ditteri — Imenotteri — Insetti.*

Letteratura albanese (Manuale di), del Prof. A. Straticò, di pag. XXIV-280 (volume doppio) . . . . 3 —

Letteratura americana, di G. Strafforello, di pag. 158. . . . . 1 50

Letteratura danese. — Vedi *Letteratura norvegiana.*

Letteratura ebraica, del Prof. A. Revel, 2 volumi, di pag. 364. . . . . 3 —

Letteratura egiziana, del Dott. L. Brigiuti. (In lavoro).

Letteratura francese, del Prof. E. Marcillac, traduzione di A. Paganini, 3ª ediz., di pag. VIII-198. 1 50

— Vedi anche *Grammatica francese — Esercizi per la grammatica francese.*

Letteratura greca, del Prof. V. Inama, 11ª edizione, migliorata (dal 40° al 45° migliaio), di pag. VIII-234 . 1 50

— Vedi anche *Esercizi greci — Filologia classica — Fonologia — Glottologia — Grammatica greca — Morfologia greca — Verbi greci.*

L. c.

Letteratura indiana, del Prof. A. De Gubernatis, di pag. VIII-159 . . . . 1 50

Letteratura inglese, del Prof. E. Solazzi, 2ª ediz., di pag. VIII-194 . . . . 1 50

— Vedi anche *Grammatica inglese.*

Letteratura islandese, del Prof. S. Ambrosoli. (In lavoro).

Letteratura italiana, del Prof. C. Fenini, 4ª edizione, di pag. VI-204 . . . . 1 50

— Vedi anche *Fonologia italiana — Morfologia italiana.*

Letteratura latina. — Vedi *Esercizi latini — Filologia classica — Fonologia latina — Grammatica latina — Letteratura romana — Verbi latini.*

Letteratura norvegiana, del Prof. S. Consoli, di pag. XVI-272 . . . . 1 50

Letteratura persiana, del Prof. I. Pizzi, di pagine X-208 . . . . 1 50

Letteratura provenzale, del Prof. A. Restori, di pag. X-220 . . . . 1 50

Letteratura romana, del Prof. F. Ramorino, 4ª edizione riveduta e corretta (dal 13° al 17° migliaio), di pag. IV-320. . . . . 1 50

Letteratura spagnuola e portoghese, del Prof. L. Cappelletti, di pag. VI-206. . . . . 1 50

— Vedi anche *Grammatica spagnuola.*

Letteratura tedesca, del Prof. O. Lange, traduzione di A. Paganini, 2ª edizione corretta, di pagine XII-168 . . . . 1 50

— Vedi anche *Esercizi tedeschi — Grammatica tedesca.*

Letteratura ungherese, del Dott. Zigány Arpàd, di pag. XII-295 . . . . 1 50

Letterature elleniche seriori, del Prof. A. Pasdera. (In lavoro).

vol. I. Alessandrina e greco-romana d'occidente.
vol. II. Greco-romana orientale e bizantina.

L. c.

Letterature slave, del Prof. D. Ciàmpoli, 2 volumi:
I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, di pag. iv-144. 1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, di pag. iv-142 . . . . 1 50

Libri e biblioteconomia. — Vedi *Bibliografia — Bibliotecario — Dizionario bibliografico — Paleografia — Tipografia.*

Lingua araba. — Vedi *Arabo volgare — Dizionario eritreo — Grammatica Galla — Lingue dell'Africa — Tigrè.*

Lingua gotica, grammatica, esercizi, testi, vocabolario comparato con ispecial riguardo al tedesco, inglese, latino e greco, del Prof. S. Friedmann, di pag. xvi-333, (volume doppio) . . . . 3 —

Lingue dell'Africa, di R. Cust, versione italiana del Prof. A. De Gubernatis, di pag. iv-110 . . . . 1 50

Lingue neo-latine, del Dott. E. Gorra, di pag. 147. 1 50
— Vedi *Filologia classica — Glottologia.*

Lingue straniere (Studio delle), di C. Marcel, ossia l'Arte di pensare in una lingua straniera, traduzione del Prof. Damiani, di pag. xvi-136 . . . . 1 50

Liquorista. — (In lavoro).
— Vedi anche *Alcool — Cognac — Enologia.*

Litografia, di C. Doyen, di pag. viii-261, con 8 tavole in cromo e fototipia e un album fuori testo con 40 figure di attrezzi, ecc., occorrenti al litografo . . . 4 —

Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali, pubblicate per cura di O. Müller, 5ª ediz., aumentata delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. Raina, di pag. xxxiv-186. . . . . 1 50

Logica, di W. Stanley Jevons, traduz. del Prof. C. Cantoni, 4ª ediz., di pag. viii-154, e 16 incisioni . . 1 50

Logica matematica, del Prof. C. Burali-Forti, di pag. vi-158. . . . . 1 50

Logismografia, del Prof. C. Chiesa, 3ª edizione, di pag. xiv-172 . . . . 1 50
— Vedi anche *Computisteria — Contabilità — Ragioneria.*

L. c.

Luce e colori, del Prof. G. Bellotti, di pag. x-157, con 24 incisioni e 1 tavola 1 50

Luce e suono, di E. Jones, traduzione di U. Fornari, di pag. viii-336, con 121 incisioni (volume doppio) . . 3 —

Macchinista e fuochista, del Prof. G. Gautero, 7ª ediz. riveduta, con aggiunte dell'Ing. L. Loria, di pag. xx-172, con 24 incisioni e col testo della Legge sulle caldaie, ecc. (dal 12° al 14° migliaio) . . . . . 2 —

Macchinista navale (Manuale del), di M. Lignarolo, di pag. xii-404, con 164 figure 5 50

— Vedi anche *Doveri del macchinista navale.*

Macchine agricole, del conte A. Cencelli-Perti, di pag. viii-216, con 68 incisioni . . . . 2 —

Macchine per cucire e ricamare, dell'Ing. Alfredo Galassini, di pag. vii-230, con 100 incisioni . 2 50

Macchine. — Vedi *Disegnatore meccanico — Doveri del macchinista — Il meccanico — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Meccanica — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico — Operaio — Tornitore meccanico.*

Macinazione. — Vedi *Industria dei molini.*

Magnetismo ed elettricità, del Dott. G. Poloni, 2ª ediz. curata dal Prof. F. Grassi, di pag. xiv-370, con 136 incisioni e 2 tavole 3 50

Maiale (Il). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, del Prof. E. Marchi, 2ª ediz., di pag. xx-736, con 190 incisioni e una Carta delle statistiche del bestiame suino 6 50

Majoliche. — Vedi *Amatore.*

Mais. — Vedi *Frumento e mais — Panificazione.*

Malattie. — Vedi *Immunità.*

Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dott. R. Wolf, traduz. con note ed aggiunte del Dott. P. Baccarini, di pag. x-268, con 50 inc. 2 —

Malattie ed alterazioni dei vini, del Prof. S. Cettolini, di pag. xi-138, con 13 incisioni . . . . . . 2 —

L. c.

Malattie trasmissibili. — Vedi *Animali parassiti — Zoonosi.*

Mandato commerciale, del Prof. E. VIDARI, di pagine VI-160 . . . . 1 50

Mare (Il), del Prof. V. BELLIO. di pag. IV-140, con 6 tavole litografate a colori 1 50

Marine (Le) **da guerra del mondo al 1897,** di L. D'ADDA, di pag. XVI-320, con 77 illustrazioni . . 4 50

Marino (Manuale del) **militare e mercantile,** del Contr'ammiraglio DE AMEZAGA, con 18 xilografie, 2ª edizione, con appendice di BUCCI DI SANTAFIORA. (In lavoro).

Marmista (Manuale del), di A. RICCI, 2ª edizione, di pag. XII-154, con 47 incisioni . . . . 2 —

Materia medica moderna (Manuale di), del Dott. G. MALACRIDA, di pag. XI-761 . . . . 7 50

Meccanica, del Prof. R. STAWELL BALL, traduz. del Prof. J. BENETTI, 3ª ediz., di pag. XVI-214, con 89 inc. 1 50

Meccanico, di E. GIORLI. Nozioni speciali di Aritmetica, Geometria, Meccanica, Generatori del vapore, Macchine a vapore, Collaudazione e costo dei materiali, Doratura, Argentatura e Nichelatura, di pagine XII-234, con 200 problemi risolti e 130 figure. . . . 2 —

— Vedi anche *Disegnatore meccanico — Disegno industriale — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Macchine agricole — Macchine da cucire e ricamare — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico — Operaio — Orologeria — Tornitore meccanico.*

Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie ed altre diverse macchine, da H. T. BROWN, traduzione italiana sulla 16ª edizione inglese, dall'Ingegnere F. CERRUTI, di pag. VI-176, con 500 incisioni nel testo (2ª edizione italiana) 2 50

Medaglie. — Vedi *Monete greche — Monete romane — Numismatica — Vocabolarietto pei numismatici.*

L. c.

Medicatura antisettica, del Dott. A. ZAMBLER, con prefazione del Prof. E. Triconi, di pag. XVI-124, con 6 incisioni 1 50

Metalli preziosi (oro, argento, platino, estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. GORINI, 2ª edizione di pagine 196, con 9 incisioni . . . . 2 —

— Vedi anche *Oreficeria — Saggiatore.*

Metallurgia. — Vedi *Siderurgia — Tempera e cementazione.*

Meteorologia generale, del Dott. L. DE MARCHI, di pag. VI-156, con 8 tavole colorate 1 50

— Vedi anche *Climatologia — Geografia fisica — Igroscopi e igrometri.*

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, tradotta dal Dott. V. LAMI, 2ª edizione. (In lavoro).

Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale,** coll'indice alfabetico di tutti i pesi misure, monete ecc. dell'Ing. A. TACCHINI, di pagine XX-482. . . . . 6 50

— Vedi anche *Statica degli strumenti metrici.*

Mezzeria (Manuale pratico della) e dei varî sistemi della colonia parziaria in Italia, del Prof. Avv. A. RABBENO, di pag. VIII-196 . . . . 1 50

Micologia. — Vedi *Funghi e Tartufi — Malattie crittogamiche.*

Microscopia. — Vedi *Anatomia microscopica — Animali parassiti — Bacologia — Batteriologia — Microscopio — Protistologia — Tecnica protistologica.*

Microscopio (Il), Guida elementare alle osservazioni di Microscopia, del Prof. CAMILLO ACQUA, di pagine XII-226, con 81 incisioni. 1 50

Militaria. — Vedi *Codice cavalleresco — Duellante — Esplodenti — Scherma — Storia arte militare — Telemetria — Ufficiale (Manuale dell').*

Mineralogia. — Vedi *Arte mineraria — Cristallografia — Marmista — Metalli preziosi — Mineralogia generale — Mineralogia descrittiva — Oreficeria — Pietre preziose — Siderurgia.*

L. c.

Mineralogia generale, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª edizione, riveduta, di pag. XVI-190, con 183 incisioni e 3 tavole cromolitogr. 1 50

Mineralogia descrittiva, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª ediz. di pagine IV-300, con 119 incisioni (volume doppio) . . . . 3 —

Misura delle botti. — Vedi *Enologia.*

Mitilicoltura. — Vedi *Ostricoltura — Piscicoltura.*

Mitologia comparata, del Prof. A. DE GUBERNATIS, 2ª ediz. di pag. VIII-150. (Esaurito).

Mitologia greca, di A. FORESTI:
Volume I. *Divinità,* di pag. VIII-264 . . . . . 1 50
Volume II. *Eroi,* di pag. 188. . . . . 1 50

Mitologia romana, del Prof. A. FORESTI. (In lavoro).

Mobili artistici. — Vedi *Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.*

Moda. — Vedi *Confezioni d' abiti — Disegno, taglio e confezione biancheria — Fiori artificiali.*

Modellatore meccanico, falegname ed ebanista, del Prof. G. MINA, di pag. XVII-428, con 293 incisioni e 1 tavola 5 50

Molini. — Vedi *Industria dei.*

Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli ingegneri, architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura, dell'Ing. E. SCHENCK, di pag. XI-188 . 3 50

Monete greche, di S. AMBROSOLI, con numerose incisioni. (In lavoro).

Monete romane, del Cav. F. GNECCHI, di pag. XV-182, con 15 tavole e 62 figure nel testo 1 50
— Vedi anche *Metrologia — Numismatica — Paleografia — Tecnologia monetaria — Vocabolarietto pei numismatici.*

Monogrammi, del Prof. A. SEVERI, 73 tavole divise in tre serie, le prime due di 462 in due cifre e la terza di 116 in tre cifre. 3 50
— Vedi anche *Calligrafia — Ornatista.*

L. c.

Morale. — Vedi *Etica — Filosofia morale.*

Morfologia greca, del Prof. V. Bettei, di pag. xx-376 (volume doppio) . . . . 3 —

Morfologia italiana, del Prof. E. Gorra, di pagine vi-142 . . . . 1 50

Mutuo soccorso. — Vedi *Società di mutuo soccorso.*

Naturalista viaggiatore, dei Proff. A. Issel e R. Gestro (Zoologia). di pag. viii-144, con 38 incisioni . . 2 —

Nautica. — Vedi *Attrezzatura navale — Canottaggio — Costruttore navale — Doveri del macchinista navale — Filonauta — Ingegnere navale — Macchinista navale — Marine da guerra — Marino — Nuotatore.*

Neurotteri. — Vedi *Imenotteri, ecc.*

Notaro (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, del notaio A. Garetti, 2ª edizione, rifusa e ampliata, di pag. xii-340 . . . . 3 50

— Vedi anche *Testamenti.*

Numeri. — Vedi *Teoria dei numeri.*

Numismatica, del Dott. S. Ambrosoli, 2ª edizione, corretta ed accresciuta, di pag. xv-250, con 120 fotoincisioni nel testo e 4 tavole 1 50

— Vedi anche *Araldica — Archeologia — Metrologia — Monete greche — Monete romane — Paleografia — Tecnologia monetaria — Vocabolarietto pei numismatici — Vocabolario araldico.*

Nuotatore (Manuale del), del Prof. P. Abbo, di pagine xii-148, con 97 incisioni 2 50

Oculistica. — Vedi *Igiene della vista.*

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni, di G. Gorini, 2ª edizione, completamente rifatta dal Dott. G. Fabris, di pag. viii-214, con 7 incisioni, 2 —

Olivo ed olio, *Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio,* del Prof. A. Aloi, 3ª ediz., di pag. xii-330, con 41 incisioni . . . . . 3 —

Omero, di W. Gladstone, traduz. di R. Palumbo e C. Fiorilli, di pag. xii-196 . . . . 1 50

L. c.

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti aggiustatori e meccanici di G. BELLUOMINI, 3ª edizione, di pag. XVI-216 . 2 —

Operazioni doganali. — Vedi *Codice doganale — Trasporti e tariffe.*

Oratoria. — Vedi *Arte del dire — Rettorica — Stilistica.*

Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, di pag. VIII-310 (volume doppio) . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. RACIOPPI, di pag. VIII-376 (vol. doppio). 3 —

Oreficeria. — Vedi *Giojelleria — Metalli preziosi — Saggiatore.*

Ornatista (Manuale dell'), dell'Arch. A. MELANI. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini, esistenti in opere antiche di biblioteche, musei e collezioni private. XXIV tavole in colori per miniatori, calligrafi, pittori di insegne, ricamatori, incisori, disegnatori di caratteri da stampa, ecc., Iª serie . . . . 4 —

— Vedi anche *Decorazioni.*

Orologeria moderna, dell'Ing. GARUFFA, con 187 illustrazioni, di pag. VIII-302, con 276 incisioni . . . 5 —

— Vedi anche *Gnomonica.*

Orologi artistici. — Vedi *Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.*

Orologi solari. — Vedi *Gnomonica.*

Orticoltura, del Prof. D. TAMARO, con 60 incisioni . 4 —

— Vedi anche *Agricoltura.*

Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. CARAZZI, con 13 fototipie, di pag. VIII-202 . . . . 2 50

— Vedi anche *Piscicoltura.*

Ottica, del Prof E. GELCICH, di pag. XVI-576, con 216 incisioni e 1 tavola . . . . 6 —

Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. NEGRIN, di pag. 222. 2 50

L. c.

Paleoetnologia, del Prof. J. Regazzoni, di pag. xi-252, con 10 incisioni 1 50
— Vedi anche *Geologia.*

Paleografia, di E. M. Thompson, traduz. dall'inglese, con aggiunte e note del Prof. G. Fumagalli, di pagine viii-156, con 21 incisioni nel testo a 3 tavole in fototipia . . . . 2 —

Panificazione razionale, di Pompilio, di pag. iv-126. 2 —
— Vedi anche *Frumento — Molini (Industria dei).*

Parafulmini. — Vedi *Elettricità — Fulmini.*

Parassiti. — Vedi *Animali parassiti.*

Pedagogia. — Vedi *Didattica — Giardino infantile — Ginnastica femminile e maschile — Giuochi infantili — Igiene scolastica — Sordomuto.*

Ortotteri. — Vedi *Imenotteri, ecc.*

Pelli. — Vedi *Concia delle pelli.*

Pensioni. — Vedi *Società di mutuo soccorso.*

Pesi e misure. — Vedi *Metrologia universale — Statica e applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici — Tecnologia e terminologia monetaria.*

Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. Belluomini, di pag. xxiv-248 . . . 3 50

Pianista (Manuale del), di L. Mastrigli, di pag. xvi-112. 2 —

Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie di varietà, di A. Pucci, di pag. viii-198, con 116 incisioni. 2 50
— Vedi anche *Botanica — Floricoltura — Frutta minori — Frutticoltura.*

Piante industriali, coltivazione, raccolta e preparazione, di G. Gorini, nuova edizione, di pag. ii-144 . 2 —

Piante tessili. — Vedi *Coltivazione e industrie delle piante tessili.*

Piccole industrie, del Prof. A. Errera, di pagine xvi-136. (Esaurito, la 2ª edizione rifatta dall'Ing. I. Ghersi è in preparazione).

L. c.

Prodotti agricoli del Tropico (Manuale pratico del piantatore), del cav. A. GASLINI. (Il caffè, la canna da zucchero, il pepe, il tabacco, il cacao, il té, il dattero, il cotone, il cocco, la coca, il baniano, il banano, l'aloé, l'indaco, il tamarindo, l'ananas, l'albero del chinino, la juta, il baobab, il papaia, l'albero del caoutchouc, la guttaperca, l'arancio, le perle). Di pag. XVI-270. . 2 —

Proiezioni (Le). Materiale, Accessori, Vedute a movimento, Positive sul vetro, Proiezioni speciali policrome, stereoscopiche, panoramiche, didattiche, ecc., del Dott. L. SASSI, di pag. XVI-447, con 141 incisioni. 5 —

Proiezioni ortogonali. — Vedi *Disegno.*

Prontuario dell'agricoltore (Manuale di agricoltura, economia, estimo e costruzioni rurali), del Prof. V. NICCOLI, di pag. XX-346 . . . . 5 50

Prontuario di geografia e statistica, del Prof. G. GAROLLO, pag. 62 . . . . 1 —

Prontuario di valutazioni, Utili, Perdite, Ricavi, Ricchezza mobile, Interesse e sconto semplici, Titoli. del Rag. E. GAGLIARDI. (In lavoro).

Prontuario per le paghe. — Vedi *Paghe.*

Proprietario di case e di opifici (Manuale del). Imposta sui fabbricati dell'Avv. G. GIORDANI, di pagine XX-264 . . . . 1 50

— Vedi anche *Ipoteche.*

Prosodia. — Vedi *Metrica dei greci e dei romani* — *Ritmica e metrica razionale italiana.*

Prospettiva (Manuale di), dell'Ing. C. CLAUDI, di pagine 64, con 28 tavole . . . . 2 —

Protistologia, del Prof. L. MAGGI, 2ª edizione, di pag. XVI-278, con 93 incis. nel testo (volume doppio). 3 —

— Vedi anche *Anatomia microscopica* — *Animali parassiti* — *Batteriologia* — *Microscopio* — *Tecnica protistologica.*

Prototipi (I) internazionali del metro e del kilogramma ed il codice metrico internazionale. — V. *Metrologia.*

Proverbi in quattro lingue. — Vedi *Dottrina popolare.*

L. c.

Proverbi (516) **sul cavallo,** raccolti ed annotati dal Colonnello VOLPINI, di pag. XIX-172 . . . . . 2 50

Psicologia, del Prof. C. CANTONI, di pagine VIII-168. 2ª edizione riveduta 1 50

— Vedi anche *Estetica — Etica — Filosofia — Logica.*

Psicologia fisiologica, del Dott. G. MANTOVANI, di pag. VIII-165, con 16 incisioni 1 50

Raccoglitore di francobolli. — Vedi *Dizionario filatelico.*

Raccoglitore di oggetti d'arte. — Vedi *Amatore di oggetti d'arte.*

Ragioneria, del Prof. V. GITTI, 3ª edizione riveduta, di pag. VIII-137, con 2 tavole. 1 50

Ragioneria delle Cooperative di consumo (Manuale di), del Prof. Rag. G. ROTA, di pagine XV-408 (volume doppio) . . . . 3 —

Ragioneria industriale, del Prof. Rag. ORESTE BERGAMASCHI, di pag. VII-280 e molti moduli (volume doppio) . . . . 3 —

Reclami ferroviarii. — Vedi *Trasporti e tariffe.*

Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, dell'Ing. G. POZZI, di pag. XV-238 con 182 incisioni e 1 tavola 2 50

Religioni e lingue dell'India inglese, di R. CUST, tradotte dal Prof. A. DE GUBERNATIS, di p. IV-124. 1 50

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, dell'Ing. P. GALLIZIA, di pag. X-336, con 236 incisioni e 2 tavole 5 50

— Vedi anche *Momenti resistenti.*

Rettorica, ad uso delle scuole, del Prof. F. CAPELLO, di pag. VI-122 . . . . 1 50

— Vedi anche *Arte del dire — Stilistica.*

Ricamo. — Vedi *Disegno e taglio di biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi — Ornatista.*

Ricchezza mobile (Imposta sui redditi di), dell'Avvocato E. BRUNI, VIII-218 . . . . 1 50

— Vedi anche *Imposte dirette — Prontuario di valutazione.*

L. c.

Ricettario fotografico, del Dott. Luigi Sassi, di pag. vi-150 . . . . 2 —

Rincoti. — Vedi *Imenotteri, ecc.*

Riscaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, del Prof. R. Ferrini, 2 vol., di pag. x-332, con 94 incisioni . . . . 4 —

Riscossione imposte. — Vedi *Imposte.*

Risorgimento italiano (Storia del), del Prof. F. Bertolini, di pag. vi-154 . . . . 1 50

— Vedi anche *Storia e cronologia — Storia italiana.*

Ristauratore dei dipinti, del Conte G. Secco-Suardo, 2 volumi, di pag. xvi-269, xii-362, con 47 inc. 6 —

— Vedi anche *Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.*

Ritmica e metrica razionale italiana, del Prof. Rocco Murari, di pag. xvi-216 . . . . 1 50

— Vedi anche *Arte del dire — Rettorica — Stilistica.*

Rivoluzione francese (La) (1789-1799), del Prof. Dott. Gian Paolo Solerio, di pag. iv-176 . . . . 1 50

Saggiatore (Man. del), di F. Buttari, di pag. viii-245, con 28 incisioni 2 50

— Vedi anche *Metalli preziosi — Oreficeria.*

Salumeria. — Vedi *Maiale.*

Sanscrito (Avviamento allo studio del), del Prof. F. G. Fumi, 2ª edizione rifatta, di pag. xii-254 (vol. doppio). 3 —

Saponeria, dell'Ing. E. Marazza. — Vedi *Industria saponiera.*

Scacchi (Manuale del giuoco degli), di A. Seghieri, 2ª ediz., di pag. xv-222, con 191 illustr. (In lavoro).

Scherma italiana (Manuale di), su i principii ideati da Ferdinando Masiello, del Comm. J. Gelli, di pagine viii-194, con 66 tavole 2 50

— Vedi anche *Codice cavalleresco — Duellante.*

Scienza delle finanze, del Dott. T. Carnevali, di pag. iv-140. . . . . 1 50

Scoltura. Scoltura italiana anticha e moderna, statuaria e ornamentale dell'Arch. Prof. A. Melani, di pagine xviii-196, con 56 tavole e 26 figure intercalate nel testo . . . . 4 —

L. c.

Scritture d'affari (Precetti ed esempi di), per uso delle scuole tecniche, popolari e commerciali, del Prof. D. MAFFIOLI, di pag. VIII-203 . . . . 1 50

Selvicoltura, di A. SANTILLI, di pag. VIII-220, e 46 inc. 2 —

Semeiotica, del Dott. U. GABBI, di pagine XVI-216, con 11 incisioni 2 50

Sericoltura. — Vedi *Bachi da seta — Gelsicoltura — Filatura — Industria della seta — Tintura della seta.*

Shakespeare, di DOWDEN, traduzione di A. BALZANI, di pag. XII-242 . . . . 1 50

Siderurgia (Manuale di), dell'Ing. V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura dell'Ing. E. GARUFFA, di pag. IV-368, con 220 incisioni 5 50

Sismologia, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50

— Vedi anche *Vulcanismo.*

Smalto. — Vedi *Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.*

Socialismo, dell'Avv. G. BIRAGHI, di pag. XV-285 (volume doppio) . . . . 3 —

Soccorsi d'urgenza, del Dott. C. CALLIANO, 3ª edizione di pagine XLI-299, con 6 tavole litografate. . . 3 —

— Vedi anche *Assistenza infermi — Igiene — Medicatura antisettica.*

Società di mutuo soccorso (Manuale tecnico per le). Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte, del Dott. G. GARDENGHI, di pag. VI-152 . . . . 1 50

Sordomuto (Il) **e la sua istruzione.** Manuale per gli allievi e le allieve delle R. Scuole normali, maestri, genitori e filantropi, del Prof. P. FORNARI, di pagine VIII-232, con 11 incisioni . . . .

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. PROCTOR, trad. con note ed aggiunte di F. PORRO, di pag. VI-178, con 71 inc. e una carta di spettri. . 1 50

Spirito di vino. — Vedi *Alcool — Cognac — Liquorista.*

L. c.

Stagno (Vasellame di). — Vedi *Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.*

Statica (Principî di) **e loro applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici,** dell'Ing. E. Bagnoli, pag. VIII-252 con 192 inc. 3 50
— Vedi anche *Metrologia.*

Statistica, del Prof. F. Virgilii, di pag. VIII-176. . 1 50

Stemmi. — Vedi *Araldica.*

Stenografia, di G. Giorgetti (secondo il sistema Gabelsberger-Noë), 2ª edizione, di pag. IV-241. . . . . 3 —

Stenografia (Guida per lo studio della) sistema Gabelsberger-Noë, compilata in 35 lezioni da A. Nicoletti, di pag. VIII-160 . . . . 1 50

Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alla loro costruzione in carta, del Prof. A. Rivelli, di pag. 90, con 92 incis. e 41 tav. 2 —

Stilistica, dei Prof. F. Capello di pag. XII-164 . . 1 50
— Vedi anche *Arte del dire — Rettorica.*

Storia antica. Vol. I. *L'Oriente Antico*, del Prof. I. Gentile, di pag. XII-232. . . . . 1 50
Vol. II. *La Grecia*, del Prof. G. Toniazzo, di pagine VI-216 . . . . 1 50

Storia dell'arte militare antica e moderna, del Cap. V. Rossetto, con 17 tavole illustrative, di pag. VIII-504 . . . . 5 50

Storia della ginnastica. — Vedi *Ginnastica.*

Storia d'Italia (Breve), del Prof. P. Orsi 1 50

Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tavole sinottiche, del Prof. V. Casagrandi, 2ª edizione, di pag. VI-260 . . . . 1 50

Storia italiana (Manuale di), C. Cantù, di pag. IV-160. 1 50
— Vedi anche *Risorgimento.*

Storia della musica, del Dott. A. Untersteiner, di pag. 300 (volume doppio) . . . . 3 —

Storia naturale dell'uomo e suoi costumi. — Vedi anche *Antropologia — Etnografia — Fisiologia — Grafologia — Paleografia.*

L. c.

Strumentazione (Manuale di), di E. PROUT, traduzione italiana con note di V. RICCI, con 96 esempi, di pag. x-222 . . . . 2 50

Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera,** del Duca di CAFFARELLI F., di pag. x-235 . . . . 2 50
— Vedi anche *Armonia* — *Cantante* — *Pianista.*

Strumenti metrici. — Vedi *Metrologia* — *Statica.*

Suono. — Vedi *Luce e suono.*

Sussidi. — Vedi *Società Mutuo Soccorso.*

Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di pag. IV-176, con 6 incisioni . . . . 2 —

Tabacchiere artistiche. — Vedi *Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.*

Tacheometria. — Vedi *Celerimensura* — *Telemetria* — *Topografia* — *Triangolazioni.*

Taglio e confezione di biancheria. — Vedi *Disegno.*

Tariffe ferroviarie. — Vedi *Codice doganale* — *Trasporti e tariffe.*

Tartufi e funghi. — Vedi *Funghi.*

Tasse di registro, bollo, ecc. — Vedi *Notaro.*

Tasse. — Vedi *Imposte.*

Tassidermista. — Vedi *Imbalsamatore* — *Naturalista viaggiatore.*

Tavole logaritmiche. — Vedi *Logaritmi.*

Tecnica microscopica. — Vedi *Anatomia microscopica.*

Tecnica protistologica, del Prof. L. MAGGI, di pag. XVI-318 (volume doppio) . . . . 3 —
— Vedi anche *Protistologia.*

Tecnologia meccanica. — Vedi *Modellatore meccanico.*

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XVI-191 . . . . 2 —

Telefono, di D. V. PICCOLI, di pag. IV-120, con 38 incisioni . . . . 2 —

L. c.

Telegrafia, del Prof. R. Ferrini, di pag. iv-318, con 95 incisioni . . . . 2 —
— Vedi anche *Cavi e telegrafia sottomarina.*

Telemetria, misura delle distanze in guerra, del Cap. G. Bertelli, di pag. xiii-145, con 12 zincotipie. 2 —

Tempera e cementazione, dell'Ing. Fadda, di pagine viii-108, con 20 incisioni . . . . 2 —

Teoria dei numeri (Primi elementi della), per il Prof. U. Scarpis, di pag. viii-152 . . . . 1 50

Teoria delle ombre, con un cenno sul Chiaroscuro e sul colore dei corpi, del Prof. E. Bonci. (In lavoro).

Terapeutica. — Vedi *Impiego ipodermico e la dosatura dei rimedi.*
— Vedi anche *Farmacista — Materia medica — Medicatura antisettica — Semeiotica.*

Termodinamica, del Prof. C. Cattaneo, di p. x-196, con 4 figure 1 50

Terremoti. — Vedi *Sismologia — Vulcanismo.*

Tessitore (Manuale del), del Prof. P. Pinchetti, 2ª edizione riveduta, di pag. xvi-312, con illustrazioni intercalate nel testo 3 50

Testamenti (Manuali dei), per cura del Dott. G. Serina, di pag. vi-238 . . . . 2 50
— Vedi anche *Notaio.*

Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. Manfredo Camperio, di pag. 180 . . . . 2 50
— Vedi anche *Arabo volgare — Grammatica galla — Lingue dell'Africa.*

Tintore (Manuale del), di R. Lepetit, 3ª ediz., di pagine x-279, con 14 incisioni (volume doppio) . . . . 4 —

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. Pascal, di pag. xvi-432. . . . . 5 —

Tipografia (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. — Compositori, e Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. Landi, di pag. 280 . . . . 2 50

L. c.

Tipografia (Vol. II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. Landi, di pag. VIII-271, corredato di figure e di modelli . . 2 50
— Vedi anche — *Vocabolario tipografico.*

Topografia e rilievi. — Vedi *Cartografia — Catasto italiano — Celerimensura — Compensazione degli errori — Curve — Disegno topografico — Estimo rurale — Geometria pratica — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali.*

Topografia di Roma antica, di L. Borsari. (In lav.).

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. Dinaro, di pag. 164 . . . . . 2 —

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe e disposizioni vigenti, per A. G. Bianchi, con una carta delle reti ferroviarie italiane, di p. XVI-152. 2 —

Travi metallici composti — Vedi *Momenti resistenti.*

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'Ing. O. Jacoangeli. Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di pagine XIV-240, con 32 incisioni, 4 quadri degli elementi geodetici, 32 modelli esemplificati pei calcoli trigonometrici e tavole ausiliarie 7 50
— Vedi anche *Cartografia — Celerimensura — Disegno topografico — Geometria pratica — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria.*

Trigonometria. — Vedi *Geometria metrica.*

Ufficiale (Manuale per l') del Regio Esercito italiano, di U. Morini, di pag. XX-388 . . . . 3 50

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, dell'Ing. G. Bertolini, pag. X-124. 2 50

Usciere. — Vedi *Conciliatore.*

Utili. — Vedi *Prontuario di valutazione.*

L. c

Uve da tavola. Varietà, coltivazione e commercio, del Dott. D. TAMARO, terza edizione, di pag. XVI-278, con 8 tavole colorate, 7 fototipie e 57 incisioni. . . 4 —

Valli lombarde, di SCOLARI. - Vedi *Dizionario alpino.*

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei) e per le operazioni di Borsa, del Dott. F. PICCINELLI, di pag. XIV-236, esaurito. — La nuova edizione ampliata è in lavoro.

— Vedi anche *Debito pubblico.*

Valutazione. — Vedi *Pontuario di.*

Vasellame antico. — Vedi *Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.*

Veleni ed avvelenamenti, del Dott. C. FERRARIS, di pag. XVI-208, con 20 incisioni 2 50

Velocipedismo. — Vedi *Ciclista.*

Ventagli artistici. — Vedi *Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.*

Ventilazione. — Vedi *Riscaldamento.*

Verbi greci anomali (I), del Prof. P. SPAGNOTTI, secondo le Gramm. di CURTIUS e INAMA, di p. XXIV-107. 1 50

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. F. PAVANELLO, con indice alfabetico di dette forme, di pag. VI-215 . . . . 1 50

Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini (Fabbricazione delle), dell'Ing. UGO FORNARI, di pag. VIII-262 . . . . . 2 —

Veterinaria. — Vedi *Alimentazione del bestiame — Bestiame — Cane — Cavallo — Coniglicoltura — Igiene veterinaria — Immunità — Maiale — Zootecnia.*

Vini bianchi, del Barone G. PRATO. (In lavoro).

Vino (Il), di G. GRAZZI-SONCINI, di pag. XVI-152. . . 2 —

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. OTTAVI, rived. ed ampliata da A. STRUCCHI, 3ª ediz., di pag. VIII-184 e 22 incisioni . . . . . . 2 —

— **ed enologia.** — Vedi *Alcool — Analisi del vino — Cantiniere — Cognac — Enologia — Enologia domestica — Liquorista — Malattie ed alterazioni dei vini — Uve da tavola — Vino.*

L. c.

Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), del Dott. S. AMBROSOLI, di pag. VIII-134 . . . . . 1 50

Vocabolario araldico ad uso degli italiani, del Conte G. GUELFI, con 335 incisioni. (In lavoro).

Vocabolario tipografico, di S. LANDI. (In lavoro).

Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. MATTEI, secondo i principii dell' inventore M. SCHLEYER, ed a norma del *Dizionario Volapük* ad uso dei francesi, del Prof. A. KERCKHOFFS, di pagine XXX-198 . . . . 2 50

Volapük (Dizion. volapük-italiano), del Prof. C. MATTEI, di pag. XX-204 . . . . 2 50

Volapük, Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152 . . . . . . 2 50

Vulcanismo, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-268, con 28 incisioni 1 50

— Vedi anche *Sismologia.*

Zoologia, dei Proff. E. H. GIGLIOLI e G. CAVANNA,
- I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . . 1 50
- II. Vertebrati. Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 incisioni. 1 50
- III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), di pag. XVI-200, con 22 incisioni 1 50

— Vedi anche *Anatomia e fisiologia comparate — Animali parassiti dell'uomo — Animali da cortile — Apicoltura — Bachi da seta — Batteriologia — Bestiame — Cane — Cavallo — Coleotteri — Colombi — Coniglicoltura — Ditteri — Embriologia e morfologia generale — Imbalsamatore — Imenotteri — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri — Maiale — Naturalista viaggiatore — Ostricoltura e mitilicoltura — Piscicoltura — Pollicoltura — — Protistologia — Tecnica protistologica — Zootecnia*

Zoonosi, del Dott. B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227. 1 50

Zootecnia, del Prof. G. TAMPELINI, di pag. VIII-297, con 52 incisioni 2 50

INDICE ALFABETICO DEGLI AUTORI

Ab-Ber